

# Extensions de la suite de Syracuse ( $3n+1$ , $3n+b$ , $5n+1, \dots$ ) : Démonstrations des différentes conjectures

Jacques BALLASI

*Jacques BALLASI*

Version 3.1

## Résumé

On listera d'abord un ensemble de définitions, récapitulatif pratique pour faciliter la lecture du document

On énoncera les différents théorèmes que l'on démontrera dans ce document

On étudiera d'abord les extensions de la suite de Syracuse définies comme cela : si  $u_n$  est impair alors  $u_{n+1} = 3u_n + b_1$  (avec  $b_1$  impair,  $b_1 = 1$  pour le cas standard)

Si, dans un premier temps, on s'intéresse à la conjecture de Syracuse classique, on peut ignorer les textes écrits en vert qui correspondent globalement à l'extension  $b_1 \neq 1$ .

On retrouvera le résultat de Shalom Eliahou (lien entre la longueur minimale d'un cycle non trivial et la valeur maximale pour laquelle on a vérifié la conjecture) d'une autre manière, en utilisant une liste de transitions frontière JGL qui nous servira pour les raisonnements suivants.

La partie V, la plus délicate et la plus longue, qui démontre mathématiquement ce résultat observé par calculs, peut être ignorée en première lecture.

Grâce à un nouveau Théorème, on pourra montrer que les éléments d'un cycle non trivial sont forcément dans un intervalle que l'on précisera.

On pourra alors aisément conclure sur l'absence de cycles non triviaux, la borne inférieure de cet intervalle étant supérieure à la valeur maximale possible pour avoir un cycle.

Un raisonnement similaire permettra de conclure qu'il n'y a pas de divergence vers l'infini.

Les résultats théoriques de la méthode sont cohérents avec les tests et aussi avec la liste d'Eric Roosendaal des records trouvés jusqu'à cette date.

Pour vérifier la robustesse de la méthode, on étudiera le cas  $u_{n+1} = 5u_n + 1$  et on montrera qu'il existe au moins une valeur pour laquelle la suite diverge.

Les démonstrations, qui peuvent être améliorées, n'utilisent que des raisonnements mathématiques assez simples et peuvent être comprises dans les moindres détails par beaucoup de personnes intéressées, tout le monde pouvant certainement comprendre les grandes lignes.

Le but du document sera atteint, mais, pour aller plus loin, j'ai énoncé ma propre conjecture !

---

Remarque concernant les documents au format PDF :

Les documents en HTML ont été écrits avec les outils d'édition formelle pour le Web que j'ai développés au début des années 2000 (peut-être avant même les projets ayant donné naissance à MathJax).

Le rendu n'a pas été réactualisé depuis plus de 15 ans et les caractéristiques des navigateurs ont un peu changé entre temps, donc il y a quelques imprécisions de placement des indices (qui pourraient être corrigées)

La conversion du format HTML vers le format PDF pour avoir un document statique dégrade encore un peu la qualité (traits de fraction manquants)

et augmente la taille du fichier.

Les démonstrations sont assez courtes, environ 70 pages. Les résultats à la fin du fichier représentent la plus grande partie du fichier, environ 500 pages.

English Français Font-size : 1 ▼ OK

Basculer vers la démonstration pour la suite standard

Choisissez la valeur de  $b_1$  :  OK (entier relatif impair)

Basculer vers la démonstration de la longueur minimale d'un cycle

## I. Définitions

- La suite de Syracuse (étendue) :  $u$
- La suite de Syracuse réduite (étendue) :  $v$
- Trajectoire de longueur  $N = m + d$  ou liste de transitions  $L(N, m, d)$  pour  $v$ :
- La suite de Syracuse réduite approchée :  $v'$
- Notations

- $X = \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}3 - \text{Ln}2}$
- $\text{app}X(k) = \frac{mX_k}{dX_k}$  la  $k^{\text{ième}}$  approximation de  $X$  par défaut
- L'inégalité (In-1)
- $\text{VMax}(n) = \frac{2^n r_n}{2^n - 3^{m_n}}$
- $C_N^{m_N} = \binom{N}{m_N}$ , ancienne notation pour le nombre de permutations
- $B_1 = \lceil \frac{\text{Ln}(|b_1|)}{\text{Ln}2} \rceil$
- $N_0 = 17$
- $\text{maxSyr\_bl} = 2^{B_1 + N_0}$

## II. Théorèmes qui seront démontrés dans le document

### 1. Extensions du type $3n + b_1$

- Théorème  $3n + b_1$  : Pour chaque valeur impaire de  $b_1$  telle que  $|b_1| < 1024$ ,  $u$  ne diverge pas et les seuls cycles sont les cycles triviaux obtenus en testant la suite de Syracuse pour tout  $u_0 \leq 2^{N_0 + B_1}$  avec  $N_0 = 17$  et  $B_1 = \lceil \frac{\text{Ln}(|b_1|)}{\text{Ln}2} \rceil$

### 2. Extension $5n + 1$

- Théorème  $5n + 1$  : Il existe au moins une valeur  $v_0$  pour laquelle  $v$  diverge vers l'infini

## III. Test de la suite de Syracuse pour trouver les cycles triviaux

## IV. Liste de transitions JGL et longueur minimale d'un cycle pour $v$ , pour tout $b_1 > 0$ et $v_0 \in \mathbb{Z}$

- Objectif
- La suite de Syracuse réduite approchée :  $v'$
- Propriété IV-3 : Il existe  $r_n$  tel que  $v_n = v'_n + r_n$  pour tout  $n \geq 0$  avec  $r_n \in \mathbb{Q}$
- Condition d'existence d'un cycle non trivial, pour tout  $b_1 > 0$  et  $v_0 > 0$

- Condition nécessaire IV-4-1 :  $\frac{r_N}{1 - \frac{3^m}{2^N}} \geq \text{maxSyr\_bl}$  pour avoir un cycle non trivial de longueur  $N$ , avec

$v_0$  la valeur minimale du cycle

- Condition nécessaire et suffisante IV-4-2 :  $v_0 = \frac{r_N}{1 - \frac{3^m}{2^N}}$  pour avoir un cycle non trivial de longueur  $N$ , avec

$v_0$  la valeur minimale du cycle

- Condition d'existence d'un cycle non trivial, pour tout  $b_1 > 0$  et  $v_0 < 0$

- Condition nécessaire IV-5-1 :  $\frac{r_N}{1 - \frac{3^m}{2^N}} \geq -maxSyr\_bl$  pour avoir un cycle non trivial de longueur N, avec

$v_0$  la valeur maximale du cycle

- Condition nécessaire et suffisante IV-5-2 :  $v_0 = \frac{r_N}{1 - \frac{3^m}{2^N}}$  pour avoir un cycle non trivial de longueur N, avec

$v_0$  la valeur maximale du cycle

6. Remarque algorithmique : Utilisation de BigInt() pour le calcul décimal

7. Equivalence des valeurs de  $(N, m, d)$  telles que  $\left|1 - \frac{3^m}{2^N}\right| \rightarrow 0$  et approximations de  $X$  par  $\frac{m}{d}$

- Propriété IV-7-1 :  $1 - \frac{3^m}{2^N} \approx d(\ln 3 - \ln 2)(X - \frac{m}{d})$  pour les approximations de  $X$  par  $\frac{m}{d}$

8. Approximations par défaut de  $X$  par  $\frac{m}{d}$

9. Approximations par excès de  $X$  par  $\frac{m}{d}$

10. Expression développée de  $r_n$

11. Construction de la liste de transitions JGL(N) pour  $v_0 > 0$  :

- JGL(1) :
- JGL(2) :
- JGL(3) :
- JGL(4) :
- Cas général, construction de JGL( $n+1$ ) à partir de JGL( $n$ ) :

12. Construction de la liste de transitions JGL(N) pour  $v_0 < 0$  :

- JGL(1) :
- JGL(2) :
- JGL(3) :
- JGL(4) :
- Cas général, construction de JGL( $n+1$ ) à partir de JGL( $n$ ) :

13. Longueur minimale d'un cycle obtenue par calculs étape par étape pour  $v_0 > 0$

- Le longueur minimale pour un cycle est 114208327604 pour la suite de Syracuse réduite  $v$
- Le longueur minimale pour un cycle est 186265759595 pour la suite de Syracuse standard  $u$

14. Longueur minimale d'un cycle obtenue par calculs étape par étape pour  $v_0 < 0$

15. Liste de transitions JGL étape par étape

16. Expression de  $m_N$  de JGL(N)

- Pour  $N \geq 1$ ,  $m_N = \lceil \frac{\ln 2}{\ln 3} N \rceil$

17. Conclusion

V. Démonstration des observations de la partie précédente

- Retour sur la construction de JGL et la longueur minimale d'un cycle non trivial
- Motifs de JGL( $n$ )
- Calcul rapide de  $R_0 = r_{N_0}$  pour JGL( $N_0$ )

1. Calcul de  $r_N$  pour une concaténation de listes de transitions

- Cas  $L_0 = L_1 + L_2$  :
- Cas  $L_0 = L_1 + L_2 + L_3$  :
- Cas général  $L_0 = \sum_{k=1}^n L_k$  :
- Cas particulier  $L_0 = n L_1$  :
- Cas général  $L_0 = \sum_{k=1}^n p_k L_k + L_{n+1}$  :
- Test de calcul de  $R_0$  :

2. Application pour JGL

$$1. \text{ Propriété V-3-2-1 : Pour JGL}(N_0), R_0 = r_{N_0} \approx \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \times \frac{N_0}{N_1} R_1 \approx \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \times \frac{d_0}{d_1} R_1$$

3. Propriété V-3-3 : Pour tout  $n > 0$ , dans  $\text{JGL}(n)$ , si  $t_n$  est de "type 1", alors  $r_n < (d_n + 1) b_1$

4. Propriété V-3-4 : Pour tout  $n + 1$  correspondant à une "approximation" de  $X$ , dans  $\text{JGL}(n)$ ,  $r_n \approx 0.822103 d_n b_1$

4. Calcul de  $\text{VMax}(n)$  pour  $n + 1$  correspondant à une "approximation" de  $X$

$$\blacksquare \text{ Propriété V-4-1 : } \text{VMax}(n) \approx \frac{R_1}{d_1} \times \frac{1}{\text{Ln}3 - \text{Ln}2} \times \frac{1}{X - \frac{m_n}{d_n + 1}} \approx 1.0136 \times \frac{b_1}{X - \frac{m_n}{d_n + 1}} \text{ pour } n + 1,$$

"approximation" de  $X$

5. Démonstration du résultat expérimental du paragraphe IV-13 pour  $v_0 > 0$  :

6. Démonstration du résultat expérimental du paragraphe IV-14 pour  $v_0 < 0$  :

## VI. Recherche de cycles :

1. Synthèse sur la longueur minimale d'un cycle non trivial :

1. Récapitulatif des résultats

2. Majoration de  $f(N)$  avec la valeur maximale de  $v_0 \approx 2^{f(N)+B_1}$  :

3. Majoration de la différence entre deux valeurs consécutives de  $\text{exp}2$  pour  $N$  une "approximation de  $X$ "

4. Minoration de la longueur minimale  $N$  d'un cycle si la suite a été vérifiée jusqu'à  $v_0 = 2^{n+B_1}$

2. "Théorème 0"

3. Localisation des éléments des éventuels cycles à l'aide du "Théorème 0"

▪ Propriété VI-3 : Si  $v$  a un cycle de longueur  $N$ , alors tous les différents éléments du cycle  $\{v_0, \dots, v_{N-1}\}$  vérifient  $v_n < 2^N$  pour  $0 \leq n < N$  (pour  $N \geq 27$  si  $|b_1| < 1024$ )

4. Raisonnement probabiliste avec la propriété fondamentale :

1. Détermination du nombre  $C_y(N)$  de candidats  $v_0$  possibles pour un cycle de longueur  $N$  :

1. Cas particulier :  $N$  est une "approximation de  $X$ "

$$\blacksquare C_y(N) = \frac{C_N^m}{N}$$

2. Cas général :  $N$  quelconque

$$\blacksquare C_y(N) < \left(1 - \frac{d_N}{m_N + 1}\right) \binom{N}{m_N} = \left(1 - \frac{d_N}{m_N + 1}\right) C_N^{m_N}$$

3. Majoration de  $C_y(N)$  pour les grandes valeurs de  $N$

$$\blacksquare C_y(N) < 2^{0.95N} \text{ pour } N > 1000$$

4. Test

2. Propriété VI-4-2 : La probabilité de " $v_n$  pair" est  $\frac{1}{2}$

3. Répartition des valeurs de  $v_0$  solutions des listes candidates

1. La probabilité que  $v_0 < 2^{N-k}$  est  $\frac{1}{2^k}$

2. Valeurs de  $v_0$  qui bouclent dans un cycle trivial pour une liste

4. Majoration du nombre de  $v_0 < 2^{N-k}$

▪ Toutes les valeurs de  $v_0$ , à partir desquelles on pourrait avoir un cycle, vérifient  $v_0 \geq 2^{0.04N}$  pour  $N > 1000$

5. Synthèse sur l'existence de cycles

▪ Conclusion : Il ne peut pas y avoir de cycle autre que les cycles triviaux pour  $|b_1| < 1024$

6. Résultats expérimentaux

## VII. Etude de la divergence vers l'infini

1. Le nombre  $U_p(N)$  de listes de transitions de longueur  $N$  telles que, pour  $v_n > v_0$  pour  $n \leq N$ , est inférieur ou égal à  $C_N^{m_N}$

$$\blacksquare U_p(N) < C_N^{m_N} < 2^{0.95N} \text{ pour } N > 1000$$

2. Listes de transitions candidates à éliminer

3. Conclusion sur l'existence de divergences vers l'infini

▪ Toutes les valeurs de  $v_0$ , à partir desquelles on pourrait avoir  $v_n \geq v_0$  pour tout  $n \leq N$ , vérifient  $v_0 \geq 2^{0.04N}$  pour  $N > 1000$  et pour  $|b_1| < 1024$

- Il n'y a pas de divergence vers l'infini pour  $|b_1| < 1024$

4. Cohérence avec les records de "vol en altitude"

5. Ma propre vérification de la suite pour  $n \leq 2^{40}$  avec  $b_1 = 1$

6. Test de la suite

## VIII. Cas général, notamment $5n + 1$

1. Cas  $a_3$  impair

1. Cas  $a_3 < 0$

2. Cas  $a_3 = 3$

1. Cas  $|b_1| \leq 1024$

2. Cas  $|b_1| > 1024$

3. Cas  $a_3 = 5$

- Pour  $a_3 = 5$  et  $b_1 = 1$ , il existe au moins une valeur  $v_0$  à partir de laquelle la suite  $v$  ( $u$  aussi) diverge

4. Cas  $a_3 > 5$

2. Cas  $a_3$  pair

1. Cas  $a_3 < 0$

2. Cas  $a_3 = 2$  ou  $a_3 = 4$  ou  $a_3 = 6$

3. Cas  $a_3 = 8$

4. Cas  $a_3 > 8$

## IX. Annexes

1. "Théorème 1"

2. Conjecture de Jacques BALLASI

## X. Références

## XI. Voir aussi : Autres documents

## I. Définitions :

On liste un ensemble de définitions, récapitulatif ou aide-mémoire pratique pour faciliter la lecture du document

### a. La suite de Syracuse (étendue) : $u$

On pose  $b_1 = 2b + 1$ , nombre entier impair relatif car  $b$  peut être négatif.

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \text{ si } u_n \text{ est pair (transition de type 0)} \\ u_{n+1} = 3u_n + b_1 \text{ si } u_n \text{ est impair (transition de type 1)} \end{cases}$$

### b. La suite de Syracuse réduite (étendue): $v$

Comme si  $u_n$  est impair,  $u_{n+1}$  est pair par construction, il est intéressant d'effectuer directement la transition suivante.

La suite de Syracuse réduite regroupe cette transition.

On pose  $b_1 = 2b + 1$ , nombre entier impair relatif car  $b$  peut être négatif.

$$\begin{cases} v_0 > 0 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{2} \text{ si } v_n \text{ est pair (transition de type 0)} \\ v_{n+1} = \frac{3v_n + b_1}{2} \text{ si } v_n \text{ est impair (transition de type 1)} \end{cases}$$

### c. Trajectoire de longueur $N = m + d$ ou liste de transitions $L(N, m, d)$ pour $v$ :

Une trajectoire de longueur  $N$  est une liste de transitions de "type 0" ou de "type 1" donc un mot composé de 0 et de 1

On posera  $d$ , le nombre de transitions "de type 0" et  $m$  le nombre de transitions de "type 1" et  $N = m + d$ :

Par exemple, avec  $b_1 = 1$  :

Avec  $v$ , on a  $v_0 = 7$  "type 1"  $\Rightarrow 11$  "type 1"  $\Rightarrow 17$  "type 1"  $\Rightarrow 26$  "type 0"  $\Rightarrow 13$ , la trajectoire est  $L(N, m, d) = "1110"$  avec  $N = 4$ ,  $m = 3$  et  $d = 1$

#### d. La suite de Syracuse réduite approchée : $v'$

Définissons la séquence approchée en remplaçant le terme  $3v_n + b_1$  par  $3v_n$

Il est immédiat que l'approximation a un sens pour des valeurs de  $v_0$  assez grandes et des valeurs de  $n$  assez faibles.

On fait en sorte que les transitions de  $v'$  soient identiques à celles de  $v$

$$\begin{cases} v'_0 = v_0 > 0 \\ v'_{n+1} = \frac{v'_n}{2} \text{ si } v_n \text{ est pair (transition de type 0)} \\ v'_{n+1} = \frac{3v'_n}{2} \text{ si } v_n \text{ est impair (transition de type 1)} \end{cases}$$

On peut remarquer que certains éléments de  $v'$  ne sont pas des entiers naturels.

#### e. Notations

- La valeur  $X = \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}3 - \text{Ln}2}$  et donc  $\frac{X}{1+X} = \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}3}$ , avec  $\text{Ln}(n)$ , le logarithme népérien de  $n$
- $\text{app}X(k) = \frac{mX_k}{dX_k}$  la  $k^{\text{ième}}$  approximation de  $X$  par défaut (avec  $\frac{3^{mX_k}}{2^{NX_k}} < 1$  et  $NX_k = mX_k + dX_k$ )
- L'inégalité (In-1) :  $\left(1 - \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}}\right)v_0 \leq \frac{r_n}{2}$
- $\text{VMax}(n) = \frac{2^n r_n}{2^n - 3^{m_n}}$ , la valeur maximale de  $v_0$  qui vérifie cette inégalité (In-1)
- $C_N^{m_N} = \binom{N}{m_N}$ , ancienne notation pour le nombre de permutations
- $B_1 = \lceil \frac{\text{Ln}(|b_1|)}{\text{Ln}2} \rceil$
- $N_0 = 17$
- $\text{maxSyr}_{b1} = 2^{B_1 + N_0}$

## II. Théorèmes qui seront démontrés dans le document

### 1. Extensions du type $3n + b_1$

On définit la suite de Syracuse étendue :  $u$

On pose  $b_1 = 2b + 1$ , nombre entier impair relatif car  $b$  peut être négatif.

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \text{ si } u_n \text{ est pair (transition de type 0)} \\ u_{n+1} = 3u_n + b_1 \text{ si } u_n \text{ est impair (transition de type 1)} \end{cases}$$

#### Remarques :

- Au lieu d'étendre la définition de  $u$  en prenant  $b_1 < 0$ , on aurait pu choisir de conserver  $b_1 > 0$  et d'étendre la définition à  $u_0 < 0$ .

D'ailleurs, pour  $b_1 < 0$ , si l'on définit la suite  $u'$  avec  $u'_0 = -u_0 < 0$  et  $b_1' = -b_1$ , alors  $u' = -u$  pour  $u'_0 < 0$  et

$b_1 > 0$ .

En effet, par récurrence immédiate, c'est vrai au rang 0 puisque  $u'_0 = -u_0$  et si l'on suppose que c'est vrai au rang  $n$ , alors on obtient facilement la propriété au rang  $n+1$  :

- Si  $u'_n = -u_n$  est pair, alors  $u'_{n+1} = \frac{u'_n}{2} = \frac{-u_n}{2} = -u_{n+1}$
- Si  $u'_n = -u_n$  est impair, alors  $u'_{n+1} = 3u'_n + b_1 = -3u_n - b_1 = -(3u_n + b_1) = -u_{n+1}$

Cette façon équivalente de voir l'extension, avec  $u_0 < 0$  au lieu de  $b_1 < 0$ , sera utilisée dans la démonstration puisque cela facilite le raisonnement.

- Dans le document, pour améliorer la lisibilité, on ne précisera pas que  $u$  dépend de  $b_1$

On définit la suite de Syracuse réduite étendue :  $v$

Comme si  $u_n$  est impair,  $u_{n+1}$  est pair par construction, il est intéressant d'effectuer directement la transition suivante.

La suite de Syracuse réduite regroupe cette transition.

On pose  $b_1 = 2b + 1$ , nombre entier impair relatif car  $b$  peut être négatif.

$$\begin{cases} v_0 > 0 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{2} \text{ si } v_n \text{ est pair (transition de type 0)} \\ v_{n+1} = \frac{3v_n + b_1}{2} \text{ si } v_n \text{ est impair (transition de type 1)} \end{cases}$$

Remarques :

- Dans le document, pour améliorer la lisibilité, on ne précisera pas que  $v$  dépend de  $b_1$
- De façon équivalente, l'extension aurait pu se faire avec  $v_0 < 0$  au lieu de  $b_1 < 0$ . Cela sera utilisé dans la démonstration puisque cela facilite le raisonnement.
- On utilisera systématiquement la suite  $v$  au lieu de  $u$  dans toute la démonstration

**Théorème  $3n + b_1$  :** Pour chaque valeur impaire de  $b_1$  telle que  $|b_1| < 1024$ ,  $u$  ne diverge pas et les seuls cycles sont les cycles triviaux obtenus en testant la suite de Syracuse pour tout  $u_0 \leq 2^{N_0 + B_1}$  avec

$$N_0 = 17 \text{ et } B_1 = \lceil \frac{\text{Ln}(|b_1|)}{\text{Ln}2} \rceil$$

Remarques :

- La suite de Syracuse standard correspond au cas particulier  $b_1 = 1$ . Dans ce cas,  $B_1 = 0$  et comme on a testé la suite jusqu'à  $2^{68} > 2^{17}$ , il n'y a qu'un seul cycle. Pour rappel, la conjecture de Syracuse est : "Pour toute valeur initiale, la suite atteint la valeur 1"
- Cycles triviaux pour  $v$  : On appellera "cycle trivial", tout cycle obtenu en testant la suite pour  $v_0 \leq 2^{N_0 + B_1}$
- Cycles très triviaux pour  $v$  : Parmi les cycles triviaux, ces cas se distinguent particulièrement et seront souvent omis
  - Si  $b_1 > 0$  alors on a un cycle pour  $v_0 = b_1$  pour la liste de transitions "10" puisque  $v_1 = \frac{3v_0 + b_1}{2} = \frac{3b_1 + b_1}{2} = 2b_1$  et  $v_2 = \frac{v_1}{2} = b_1 = v_0$
  - Si  $b_1 < 0$  alors on a un cycle pour  $v_0 = -b_1$  pour la liste de transitions "1" puisque  $v_1 = \frac{3v_0 + b_1}{2} = \frac{-3b_1 + b_1}{2} = -b_1 = v_0$

Pour toute valeur de  $b_1$ , il existe au moins un cycle.

- On dira que l'on a "testé la suite" ou que la "suite est vérifiée" jusqu'à une valeur  $M$  si pour toute valeur inférieure à  $M$ , alors les résultats ne sont pas en désaccord avec le théorème, c'est à dire que la suite  $u$  ne diverge pas et que les cycles trouvés sont inclus dans la liste des cycles triviaux. Si  $M \geq 2^{N_0 + B_1}$  alors c'est que l'on a trouvé tous les cycles triviaux et aucun autre.

- On a pris  $N_0 = 17$  pour la démonstration.  
On pourrait certainement prendre une valeur inférieure, notamment pour certaines valeurs de  $-1024 \leq b_1 \leq 1024$   
On aurait aussi pu prendre une valeur supérieure comme  $N_0 = 22$  (ou un peu plus), ce qui aurait facilité la conclusion sur la recherche de cycles, et ce qui n'aurait rien changé aux résultats des tests qui auraient simplement été un peu plus longs à effectuer.
- Il n'y a pas de difficulté conceptuelle à démontrer le théorème pour  $b_1 < -1024$  ou  $b_1 > 1024$ , il faudrait juste augmenter la valeur de  $N_0$  (dont on pourrait déterminer sa nouvelle valeur qui serait d'ailleurs certainement guère plus élevée) et tester de nouveau la suite pour  $v_0 \leq 2^{N_0+B_1}...$  jusqu'à l'impossibilité de faire une telle vérification, déjà pour  $|b_1| > 2^{68-17} = 2^{51}$ , qui représente le maximum de tests effectués à ce jour pour la suite standard.

Pour démontrer le théorème :

- On recherchera les cycles triviaux en testant la suite
- On construira la liste JGL qui est l'élément central pour la démonstration
- On finalisera l'étude des cycles en montrant qu'il n'y a pas d'autres cycles que les cycles triviaux.
- On montrera ensuite que la suite ne diverge pas.

## 2. Extension $5n+1$

$$\begin{cases} v_0 > 0 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{2} \text{ si } v_n \text{ est pair (transition de type 0)} \\ v_{n+1} = \frac{5v_n+1}{2} \text{ si } v_n \text{ est impair (transition de type 1)} \end{cases}$$

**Théorème  $5n+1$  : Il existe au moins une valeur  $v_0$  pour laquelle  $v$  diverge vers l'infini**

### III. Test de la suite de Syracuse pour trouver les cycles triviaux

Pour la suite de Syracuse standard, la conjecture de Syracuse a été vérifiée pour tout  $v_0 \leq 1.25 \times 2^{62}$  (source Wikipedia au 01/02/2021)

Après vérification de la page Wikipedia<sup>[1][2]</sup> au moment de l'écriture de cette version, (écriture qui a commencé le 30/10/2022), la conjecture de Syracuse a été vérifiée pour tout  $v_0 \leq 2^{68}$

Cette borne de vérification peut encore évoluer, ce qui modifierait la longueur minimale d'un éventuel cycle.

On posera  $maxSyr\_l = 2^{68}$  dans le reste du document.

Comme  $2^{68} > 2^{17}$ , on n'a pas de test complémentaire à faire, le seul cycle trivial est 1,4,2 pour  $u$  ou 1,2 pour  $v$ .





Je n'ai trouvé aucune donnée de vérification de la suite pour  $b_1 \neq 1$ , il est vrai qu'il faudrait faire des calculs pour chaque valeur de  $b_1$

On posera  $B_1 = \lceil \frac{\text{Ln}(|b_1|)}{\text{Ln}2} \rceil$

- Cycles triviaux pour  $v$  : On appellera "cycle trivial", tout cycle obtenu en testant la suite pour  $v_0 \leq 2^{N_0+B_1}$
- Cycles très triviaux pour  $v$  : Parmi les cycles triviaux, ces cas se distinguent particulièrement et seront souvent omis

- Si  $b_1 > 0$  alors on a un cycle pour  $v_0 = b_1$  pour la liste de transitions "10" puisque

$$v_1 = \frac{3v_0 + b_1}{2} = \frac{3b_1 + b_1}{2} = 2b_1 \text{ et } v_2 = \frac{v_1}{2} = b_1 = v_0$$

- Si  $b_1 < 0$  alors on a un cycle pour  $v_0 = -b_1$  pour la liste de transitions "1" puisque

$$v_1 = \frac{3v_0 + b_1}{2} = \frac{-3b_1 + b_1}{2} = -b_1 = v_0$$

Pour toute valeur de  $b_1$ , il existe au moins un cycle.

- Pour  $b_1 < 0$ , il suffit d'étudier  $v$  pour  $v_0 > -b_1$ .

En effet :

- Si  $v_0 = -b_1$  alors on a le cycle trivial
- Si  $0 < v_0 < -b_1$ , alors il existe  $n$  tel que  $v_n < 0$ . Cela se ramène donc ensuite à l'étude de  $v'$  avec  $v'_0 = -v_n > 0$  et  $b'_1 = -b_1 > 0$ .

Preuve de l'existence de  $n$  tel que  $v_n < 0$  :

- Si  $v_0$  est pair alors  $v_1 - v_0 = \frac{-v_0}{2} < 0$  car  $v_0 \geq 2$
- Si  $v_0$  est impair alors  $v_1 - v_0 = \frac{3v_0 + b_1}{2} - v_0 = \frac{v_0 + b_1}{2} < 0$

Donc, la suite  $v$  est strictement décroissante tant que le terme courant est positif. Comme  $v_n \neq 0$ , il existera  $n$  tel que  $v_n < 0$

- Pour  $b_1 < 0$ , on a aussi 2 types de cycles assez récurrents :

- Pour  $b_1 = -3(2k+1)$  avec  $k > 0$  : Si  $v_0 = \frac{-b_1}{3} = -(2k+1)$  qui est impair, alors  $v_1 = \frac{3v_0 + b_1}{2} = 0$  et alors  $v_n = 0$  pour tout  $n > 0$
- Pour  $b_1 = -9(2k+1)$  avec  $k > 0$  : Si  $v_0 = \frac{-b_1}{9} = 2k+1$  qui est impair, alors

$$v_1 = \frac{3v_0 + b_1}{2} = \frac{\frac{-b_1}{3} + b_1}{2} = \frac{b_1}{3} \text{ impair, } v_2 = \frac{3v_1 + b_1}{2} = \frac{b_1 + b_1}{2} = b_1 \text{ impair et}$$

$$v_3 = \frac{3v_2 + b_1}{2} = \frac{3b_1 + b_1}{2} = 2b_1 \text{ pair, } v_4 = \frac{2b_1}{2} = b_1 = v_2 \text{ donc on a un cycle de longueur 2, pour lequel la valeur minimale est } b_1$$

Etude du comportement de  $v$  pour les valeurs de  $v_0 < 2^{N_0+B_1}$ , afin de trouver l'ensemble des cycles triviaux, le but de la démonstration étant de démontrer qu'il n'en existe pas d'autres :

- Les calculs ont été faits avec l'algorithme en Javascript ci-dessous. Il peut certainement être optimisé comme tous les autres algorithmes fournis ici, ce n'est pas le but de ce document. C'est ce programme qui a été utilisé pour avoir les résultats ci-dessous.
- Pour  $-1024 < b_1 < 1024$  en testant pour  $v_0 < 2^{N_0+B_1}$  avec  $N_0 = 17$  :

Tous les cycles triviaux obtenus ont une longueur inférieure ou égale à  $426 < 1539$  (et  $426 < 1054$  pour  $b_1 < 0$ ).

La première condition est remplie pour la démonstration.

Le temps de calcul a été 17250 s pour  $0 < b_1 < 1024$  et de 17995 s pour  $-1024 < b_1 < 0$ , soit un total d'environ 10 heures sur mon ordinateur (processeur Intel(R) Core(TM) i5-1035G1, navigateur Google Chrome Version 119.0.6045.160 (Build officiel) (64 bits)).

$maxSyr\_bl = 2^{N_0+B_1}$  avec  $N_0 = 17$ .

Valeur de  $b_1$  :  Test pour  $v_0 < 2^{N_0+B_1}$  avec  $N_0$  : 17

Tests pour toutes les valeurs de  $b_1$  avec 0   $|b_1| < 8$

Résumé des résultats exhaustifs pour  $0 < b_1 < 1024$  :

- 259 valeurs de  $b_1$  ont seulement un cycle très trivial
- La longueur maximale d'un cycle est 426 obtenue pour  $b_1 = 563$  et  $v_0 = 19$
- Il y a 2864 cycles qui ne sont pas très triviaux

Résultats exhaustifs pour :  $0 < b_1 < 1024$  :

[Résultats à la fin du document](#)

[Voir les résultats](#)

Résumé des résultats exhaustifs pour  $-1024 < b_1 < 0$  :

- 256 valeurs de  $b_1$  ont seulement un cycle très trivial
- La longueur maximale d'un cycle est 426 obtenue pour  $b_1 = -563$  et  $v_0 = -19$
- Il y a 3927 cycles qui ne sont pas très triviaux

Résultats exhaustifs pour :  $-1024 < b_1 < 0$  :

[Résultats à la fin du document](#)

[Voir les résultats](#)

#### IV. Liste de transitions JGL et longueur minimale d'un cycle pour $v$ , pour tout $b_1 > 0$ et $v_0 \in \mathbb{Z}$

##### 1. Objectif

L'objectif de cette partie est de retrouver, d'une manière assez différente, le résultat obtenu par monsieur Shalom Eliahou<sup>[3][4]</sup>

- En français : Publié le 2011/12/20 dans le document "Le problème  $3n+1$  : y-a-t-il des cycles non triviaux ?" (<https://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-y-a-t-il-des-cycles-non-triviaux-III.html>).
- En anglais : "The  $3x + 1$  problem : new lower bounds on nontrivial cycle lengths" (<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X9390052U>)

Ces documents sont référencés dans les pages Wikipedia de la conjecture de Syracuse en français<sup>[1]</sup> et de la conjecture de Collatz<sup>[2]</sup> en anglais, même si depuis, le résultat a été réactualisé.

Puisque la conjecture dans le cas standard a été vérifiée pour  $n \leq 2^{68}$ , alors il n'existe pas d'autre cycle de longueur inférieure à 186 milliards pour  $u$ .

On va montrer que pour  $0 < b_1 < 1024$ , compte tenu des tests pour  $v_0 < 2^{N_0+B_1}$ , il existe certes des cycles dits triviaux et la longueur minimale d'un autre cycle est supérieure ou égale à 2510 pour  $u$  et 1539 pour  $v$   
Et, on va montrer que pour  $-1024 < b_1 < 0$ , compte tenu des tests pour  $v_0 < 2^{N_0+B_1}$ , il existe certes des cycles dits triviaux et la longueur minimale d'un autre cycle est supérieure ou égale à 1719 pour  $u$  et 1054 pour  $v$

Remarques :

- Lorsque la conjecture de Syracuse a été énoncée, il a certainement été naturel de regarder jusqu'où elle était vraie.
- Le résultat de Shalom Eliahou qui montre le lien entre la vérification de la conjecture et la longueur minimale d'un cycle a certainement aussi contribué à tester de plus en plus loin encore la validité de la conjecture

- Les ordinateurs sont devenus plus puissants au fil des années et certainement  $364249198012174112 \sim 3.64 \times 10^{17}$  tests ont dû être réalisés pour vérifier la conjecture jusqu'à  $2^{68}$
- **En fait, dans ma démonstration du théorème, il suffit de la vérifier jusqu'à  $2^{17}$  et peut-être, on pourrait faire moins.**

La méthode utilisée repose sur l'utilisation d'une liste de transitions que l'on nommera JGL (pour "Just Greater List") que l'on va définir, ce qui permettra de la construire pas à pas.

Par un simple calcul informatique, qui dure assez longtemps, on retrouve le résultat.

Un certain nombre de paragraphes sont "dupliqués" pour le cas  $v_0 < 0$  (ou  $b_1 < 0$ )

Dans la partie suivante, on ne se contentera pas de ce calcul et on ajoutera une démonstration plus mathématique et rigoureuse en étudiant les motifs de la liste JGL pour obtenir instantanément le résultat, sans véritable calcul informatique.

## 2. La suite de Syracuse réduite approchée : $v'$

Définissons la séquence approchée en remplaçant le terme  $3v_n + b_1$  par  $3v_n$

Il est immédiat que l'approximation a un sens pour des valeurs de  $v_0$  assez grandes et des valeurs de  $n$  assez faibles.

On fait en sorte que les transitions de  $v'$  soient identiques à celles de  $v$

$$\begin{cases} v'_0 = v_0 > 0 \\ v'_{n+1} = \frac{v'_n}{2} \text{ si } v_n \text{ est pair (transition de type 0)} \\ v'_{n+1} = \frac{3v'_n}{2} \text{ si } v_n \text{ est impair (transition de type 1)} \end{cases}$$

On peut remarquer que certains éléments de  $v'$  ne sont pas des entiers naturels.

## 3. Propriété IV-3 : Il existe $r_n$ tel que $v_n = v'_n + r_n$ pour tout $n \geq 0$ avec $r_n \in \mathbb{Q}$

Cette expression est vraie pour  $n = 0$  avec  $r_0 = 0$

Supposons la propriété vraie au rang  $n$  et montrons qu'elle est vérifiée au rang  $(n+1)$

Si  $v_n$  est pair alors  $v_{n+1} = \frac{v_n}{2} = \frac{v'_n + r_n}{2} = \frac{v'_n}{2} + \frac{r_n}{2} = v'_{n+1} + \frac{r_n}{2}$  donc c'est vrai avec  $r_{n+1} = \frac{r_n}{2}$

Si  $v_n$  est impair alors  $v_{n+1} = \frac{3v_n + b_1}{2} = \frac{3(v'_n + r_n) + b_1}{2} = \frac{3v'_n}{2} + \frac{3r_n + b_1}{2}$  donc c'est vrai avec

$$r_{n+1} = \frac{3r_n + b_1}{2}$$

On remarquera que si  $v_0$  suit la trajectoire L, alors  $r_n$  suit la même évolution que la suite de Syracuse réduite. C'est comme si l'on partait de la valeur 0.

Un avantage pour l'étude est que la quantité  $r_n$  dépend uniquement de la liste de transitions (mais pas de  $v_0$ )

Donc pour tout  $n$

- Si  $b_1 > 0$  alors  $r_n \geq 0$
- Si  $b_1 < 0$  alors  $r_n \leq 0$

Voir le paragraphe IV-10 pour plus de détails

## 4. Condition d'existence d'un cycle non trivial, pour tout $b_1 > 0$ et $v_0 > 0$

Admettons qu'il existe  $L(N, m, d)$  qui représente un cycle de longueur  $N$  pour  $v$ .

Remarque : On utilise toujours la suite réduite  $v$ . Ainsi, si  $v$  a un cycle de longueur  $N$ , alors  $u$  a un cycle de

longueur  $N+m$  (et inversement).

S'il existe  $L(N, m, d)$  pour laquelle on a un cycle pour  $v$ , alors les  $N$  permutations circulaires de  $L(N, m, d)$  représentent ce cycle de longueur  $N$ . On peut toujours choisir la liste de transitions pour laquelle  $v_0$  est le plus petit élément du cycle, ce n'est pas une restriction.

Si  $v_0 > 0$  est le plus petit élément d'un éventuel cycle de longueur  $N$  alors les  $N$  éléments distincts sont  $v_0, v_1, \dots, v_{N-1}$  et  $v_{n+1} = v(v_n)$  pour tout  $0 \leq n < N$  et  $v_0$  suit la liste de transitions  $L(N, m, d)$

- $v_n > v_0$  pour  $0 < n < N$
- $v_N = v_0$  pour avoir un cycle de longueur  $N$

Dans ce paragraphe, on étudie aussi le cas général avec  $b_1 > 1$

De plus, pour tout  $0 < n \leq N$ ,

- $r_n \geq 0$  car  $b_1 > 0$  et comme  $t_0$  est forcément de "type 1" pour que  $v_1$  soit supérieur à  $v_0$ , alors on a même  $r_n > 0$

- $v_n = \frac{3^{m_n}}{2^n} v_0 + r_n \geq v_0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{3^{m_n}}{2^n}\right) v_0 \leq r_n$

0. **Cas 0** : Si  $\frac{3^{m_n}}{2^n} > 1$ , alors c'est toujours vérifié car  $v_0 > 0$  et  $r_n \geq 0$

1. **Cas 1** : Si  $\frac{3^{m_n}}{2^n} < 1$ , alors  $\left(1 - \frac{3^{m_n}}{2^n}\right) v_0 \leq r_n \Leftrightarrow v_0 \leq \frac{r_n}{1 - \frac{3^{m_n}}{2^n}} = V(n-1)$ .

Remarques :

- Si, pour tout  $0 < n \leq N$ , on était dans le "cas 0", alors  $v_N > v_0$  et il n'y aurait pas de cycle.

Donc, forcément, il existe au moins une étape  $n$  pour laquelle  $\frac{3^{m_n}}{2^n} < 1$ , c'est à dire que  $r_n$  est suffisamment grand pour compenser la différence  $v'_n - v_0$ , le passage sous la frontière induite par  $v_0$ .

- Le test de la suite a été fait pour  $v_0 < \text{maxSyr\_bl}$ , ce qui a permis de détecter tous les cycles "triviaux".

Pour  $b_1 = 1$ ,  $\text{maxSyr\_bl} = 2^{68}$  et on a trouvé qu'un seul cycle de longueur 2 pour la liste de transitions "10"

Pour  $b_1 > 1$ ,  $\text{maxSyr\_bl} = 2^{17+B_1}$  et pour chaque valeur de  $b_1$ , on a éventuellement trouvé un ensemble de cycles "triviaux", en plus du cycle de longueur 2 pour la liste de transitions "10"

- Pour un cycle "non trivial", on a forcément  $v_0 > \text{maxSyr\_bl}$  et donc pour toutes les valeurs de  $0 < n < N$  correspondant au "cas 1", on a  $V(n-1) \geq \text{maxSyr\_bl}$

Pour augmenter la valeur de  $V(n-1)$  avec  $v_0$  la valeur minimale du cycle :

- $r_n$  doit être maximum
- $1 - \frac{3^{m_n}}{2^n}$  doit être le plus proche de 0 par valeur supérieure

**Condition nécessaire IV-4-1** :  $\frac{r_N}{1 - \frac{3^m}{2^N}} \geq \text{maxSyr\_bl}$  pour avoir un cycle non trivial de longueur  $N$ ,

avec  $v_0$  la valeur minimale du cycle

**Condition nécessaire et suffisante IV-4-2** :  $v_0 = \frac{r_N}{1 - \frac{3^m}{2^N}}$  pour avoir un cycle non trivial de longueur  $N$ ,

avec  $v_0$  la valeur minimale du cycle

La liste JGL que l'on va définir réalisera les 2 propriétés :

- $\frac{3^m}{2^N}$  sera le plus proche possible de 1 par défaut

- $r_N$  sera le maximum pour l'ensemble  $L(N, m, d)$  avec  $v_0$  le minimum des  $v_n$  pour  $0 < n < N$

Intéressons nous d'abord de savoir quand  $\frac{3^m}{2^N}$  est le plus proche possible de 1 par défaut. Pour cela, il nous faut une précision de calcul supérieure à celle par défaut dans Javascript, c'est l'objet du paragraphe suivant, après l'étude du cas symétrique pour  $b_1 < 0$ .

Ensuite, nous analyserons le comportement de  $r_N$  et construirons la liste JGL.

## 5. Condition d'existence d'un cycle non trivial, pour tout $b_1 > 0$ et $v_0 < 0$

Pour  $b_1 < 0$  (initialement) :

- On utilise l'équivalence décrite dans le paragraphe I-a, à savoir que l'extension pour  $b_1 < 0$  peut être remplacée par l'étude de la suite  $b_1' = -b_1 > 0$  et  $v_0 < 0$  puisque tous les éléments sont simplement opposés.
- Ainsi, après ce changement  $b_1$  est toujours positif et, par conséquent  $r_n$  aussi mais  $v_0 < 0$ .

Admettons qu'il existe  $L(N, m, d)$  qui représente un cycle de longueur  $N$  pour  $v$ , c'est alors un cycle pour  $-v$ .

Remarque : On utilise toujours la suite réduite  $v$ . Ainsi, si  $v$  a un cycle de longueur  $N$ , alors  $u$  a un cycle de longueur  $N+m$  (et inversement).

S'il existe  $L(N, m, d)$  pour laquelle on a un cycle pour  $v$ , alors les  $N$  permutations circulaires de  $L(N, m, d)$  représentent ce cycle de longueur  $N$ . On peut toujours choisir la liste de transitions pour laquelle  $v_0$  est le plus grand élément du cycle, ce n'est pas une restriction.

Si  $v_0$  est le plus grand élément d'un éventuel cycle de longueur  $N$  alors les  $N$  éléments distincts sont  $v_0, v_1, \dots, v_{N-1}$  et  $v_{n+1} = v(v_n)$  pour tout  $0 \leq n < N$  et  $v_0$  suit la liste de transitions  $L(N, m, d)$

NB : Attention, ici  $v_0$  représente le plus grand élément du cycle :

- Si  $v_0 > 0$  alors on serait dans le cas précédent qui est déjà décrit
- Si  $v_0 < 0$  alors  $v_0 \geq v_n$  signifie  $|v_0| \leq |v_n|$ , c'est le cas symétrique que l'on étudie ici.

On est donc dans le cas :

- $v_0 < 0$
- $v_n < v_0$  pour  $0 < n < N$
- $v_N = v_0$  pour avoir un cycle de longueur  $N$

Dans ce paragraphe, on étudie aussi le cas général avec  $b_1 > 0$  et  $v_0 < 0$

De plus, pour tout  $0 < n \leq N$ ,

- $r_n \geq 0$  car  $b_1 > 0$  après transformation et comme  $t_0$  est forcément de "type 1" pour que  $v_1$  soit inférieur à  $v_0$ , alors on a même  $r_n > 0$

- $v_n = \frac{3^{m_n}}{2^n} v_0 + r_n \leq v_0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{3^{m_n}}{2^n}\right) v_0 \geq r_n$

0. **Cas 0** : Si  $\frac{3^{m_n}}{2^n} < 1$ , alors c'est impossible

1. **Cas 1** : Si  $\frac{3^{m_n}}{2^n} > 1$ , alors  $\left(1 - \frac{3^{m_n}}{2^n}\right) v_0 \geq r_n \Leftrightarrow v_0 \leq \frac{r_n}{1 - \frac{3^{m_n}}{2^n}} = V(n-1)$ .

Remarques :

- Si, pour tout  $0 < n \leq N$ , on était dans le "cas 0", alors il n'y aurait pas de cycle.

Donc, forcément, il existe au moins une étape  $n$  pour laquelle  $\frac{3^{m_n}}{2^n} > 1$ , c'est à dire que  $r_n$  est suffisamment grand pour compenser la différence  $v'_n - v_0$ , l'état sous la frontière induite par  $v_0$ .

- Le test de la suite a été fait pour  $-maxSyr\_bl < v_0 < 0$ , ce qui a permis de détecter tous les cycles "triviaux" (c'est à dire, avec  $0 < v_0 < maxSyr\_bl$  et  $b_1 < 0$ ).

$maxSyr\_bl = 2^{N_0+B_1}$  et pour chaque valeur de  $b_1$ , on a éventuellement trouvé un ensemble de cycles "triviaux", en plus du cycle de longueur 1 pour la liste de transitions "1"

- Pour un cycle "non trivial", on a forcément  $v_0 < -maxSyr\_bl$  et donc pour toutes les valeurs de  $0 < n < N$  correspondant au "cas 1", on a  $0 > V(n-1) \geq -maxSyr\_bl$

Pour augmenter la valeur de  $V(n-1)$  avec  $v_0$  la valeur maximale du cycle :

- $r_n$  doit être maximum
- $1 - \frac{3^{m_n}}{2^n}$  doit être le plus proche de 0 par valeur inférieure

**Condition nécessaire IV-5-1 :**  $\frac{r_N}{1 - \frac{3^m}{2^N}} \geq -maxSyr\_bl$  pour avoir un cycle non trivial de longueur N,

avec  $v_0$  la valeur maximale du cycle

**Condition nécessaire et suffisante IV-5-2 :**  $v_0 = \frac{r_N}{1 - \frac{3^m}{2^N}}$  pour avoir un cycle non trivial de longueur N,

avec  $v_0$  la valeur maximale du cycle

La liste JGL que l'on va définir réalisera les 2 propriétés :

- $\frac{3^m}{2^N}$  sera le plus proche possible de 1 par excès
- $r_N$  sera le maximum pour l'ensemble  $L(N, m, d)$  avec  $v_0$  le maximum des  $v_n$  pour  $0 < n < N$

Intéressons nous d'abord de savoir quand  $\frac{3^m}{2^N}$  est le plus proche possible de 1 par excès. Pour cela, il nous faut une précision de calcul supérieure à celle par défaut dans Javascript, c'est l'objet du paragraphe suivant.

Ensuite, nous analyserons le comportement de  $r_N$  et construirons la liste JGL.

La liste JGL sera identique au cas précédent ( $b_1 > 0$  et  $v_0 > 0$ ), seules les valeurs de N intéressantes seront différentes.

## 6. Remarque algorithmique : Utilisation de BigInt() pour le calcul décimal

L'implémentation des décimaux en langage Javascript (standard IEEE 754) ne permet pas d'avoir la précision suffisante dans certains calculs.

Au lieu de programmer ou d'utiliser une bibliothèque pour améliorer la précision de calcul (qui ralentit les calculs), comme uniquement quelques opérations mathématiques sont nécessaires dans les programmes du document, principalement la division et le logarithme népérien, on multiplie les quantités par un facteur dépendant de la précision voulue, ainsi, on peut utiliser la division entière de BigInt(). On fait la même chose pour les logarithmes népérien de 2 et 3.

On voit que le logarithme népérien de 5 est aussi défini, utilisé pour étudier la forme  $5n + 1$ .

On a alors le code et les variables globales suivants pour l'ensemble des algorithmes (définition de la précision, évaluation et formattage des résultats) :

Javascript code not available in this document.

7. **Equivalence des valeurs de  $(N, m, d)$  telles que  $\left|1 - \frac{3^m}{2^N}\right| \rightarrow 0$  et approximations de  $X$  par  $\frac{m}{d}$**

$$\text{On a : } \frac{m}{d} - X = \frac{m}{d} - \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}3 - \text{Ln}2} = \frac{m(\text{Ln}3 - \text{Ln}2) - d \text{Ln}2}{d(\text{Ln}3 - \text{Ln}2)} = \frac{m \text{Ln}3 - (m+d) \text{Ln}2}{d(\text{Ln}3 - \text{Ln}2)} = \frac{\text{Ln}\left(\frac{3^m}{2^N}\right)}{d(\text{Ln}3 - \text{Ln}2)} \text{ car}$$

$$N = m + d$$

Donc  $\frac{3^m}{2^N} = e^{d(\text{Ln}3 - \text{Ln}2)(\frac{m}{d} - X)}$  est proche de 1 si et seulement si  $d(\text{Ln}3 - \text{Ln}2)(\frac{m}{d} - X)$  est proche de 0.

Il faut donc rechercher les approximations de  $X$  avec  $\frac{m}{d}$ .

On aura alors un équivalent car  $e^u \approx 1 + u$  en 0, car pour les approximations la différence  $\left|\frac{m}{d} - X\right|$  est de l'ordre de

$$\frac{1}{d^2}$$

$$\frac{3^m}{2^N} \approx 1 + d(\text{Ln}3 - \text{Ln}2)\left(\frac{m}{d} - X\right)$$

Donc :

- **Propriété IV-7-1 :  $1 - \frac{3^m}{2^N} \approx d(\text{Ln}3 - \text{Ln}2)\left(X - \frac{m}{d}\right)$  pour les approximations de  $X$  par  $\frac{m}{d}$**

**NB :** Dans la suite du document, on notera parfois  $N$  correspond à une "approximation" de  $X$  comme raccourci de langage, bien entendu, c'est  $\frac{m}{d}$  qui approxime  $X$  avec  $N = m + d$

On pourrait chercher les approximations de  $X$  par les fractions continues car la méthode permet une convergence rapide

Cependant, ce n'est pas la méthode envisagée pour avoir la liste exhaustive des approximations pour une valeur maximale donnée de  $N$ .

On utilisera l'arbre de Stern-Brocot pour lister toutes les approximations par défaut (ou par excès) de  $X$ .

La méthode donne toutes les fractions irréductibles  $\frac{m}{d}$ , ce qui n'est pas une contrainte a priori pour la longueur d'un cycle  $N = m + d$  donc il faudra considérer toutes les longueurs multiples  $kN$  avec  $k \geq 1$ , si cela a une signification pour le théorème de Syracuse.

8. **Approximations par défaut de  $X$  par  $\frac{m}{d}$**

Rappel de la méthode de l'arbre de Stern-Brocot :

Initialement,  $a = d = 0$  et  $b = c = 1$ ,  $\frac{1}{0}$  représentant l'infini.

On réitère les étapes suivantes jusqu'à la précision voulue, sachant que l'on n'a pas forcément une meilleure approximation par défaut (différente de celles déjà obtenues) à chaque étape

Si  $\frac{a}{b} < X < \frac{c}{d}$ , alors on compare avec avec la médiane  $\frac{a+c}{b+d}$ .

- Si  $X \geq \frac{a+c}{b+d}$  alors  $\frac{a+c}{b+d}$  est une meilleure approximation par défaut et on change  $\frac{a}{b}$  par la médiane



- Si  $X < \frac{a+c}{b+d}$  alors on change  $\frac{c}{d}$  par la médiane

On notera  $\text{appX}(k) = \frac{mX_k}{dX_k}$  la  $k^{\text{ième}}$  approximation de  $X$  par défaut (avec  $\frac{3^{mX_k}}{2^{NX_k}} < 1$  et  $NX_k = mX_k + dX_k$ )

On trouve les résultats suivants :

$m$	$d$	N	$\text{diff} = \frac{m}{d} - X$	$d^2 \times  \text{diff} $
1	1	2	$-7.0951 \times 10^{-1}$	$7.0951 \times 10^{-1}$
3	2	5	$-2.0951 \times 10^{-1}$	$8.3805 \times 10^{-1}$
5	3	8	$-4.2845 \times 10^{-2}$	$3.8560 \times 10^{-1}$
17	10	27	$-9.5113 \times 10^{-3}$	$9.5113 \times 10^{-1}$
29	17	46	$-3.6289 \times 10^{-3}$	1.0488
41	24	65	$-1.1780 \times 10^{-3}$	$6.7850 \times 10^{-1}$
94	55	149	$-4.2038 \times 10^{-4}$	1.2717
147	86	233	$-2.0897 \times 10^{-4}$	1.5455
200	117	317	$-1.0958 \times 10^{-4}$	1.5001
253	148	401	$-5.1832 \times 10^{-5}$	1.1353
306	179	485	$-1.4085 \times 10^{-5}$	$4.5129 \times 10^{-1}$
971	568	1539	$-4.2491 \times 10^{-6}$	1.3709
1636	957	2593	$-2.4094 \times 10^{-6}$	2.2067
2301	1346	3647	$-1.6331 \times 10^{-6}$	2.9587
2966	1735	4701	$-1.2049 \times 10^{-6}$	3.627
3631	2124	5755	$-9.3354 \times 10^{-7}$	4.2115
4296	2513	6809	$-7.4619 \times 10^{-7}$	4.7123
4961	2902	7863	$-6.0906 \times 10^{-7}$	5.1293
5626	3291	8917	$-5.0436 \times 10^{-7}$	5.4625
6291	3680	9971	$-4.2179 \times 10^{-7}$	5.712
6956	4069	11025	$-3.5500 \times 10^{-7}$	5.8777
7621	4458	12079	$-2.9988 \times 10^{-7}$	5.9597
8286	4847	13133	$-2.5360 \times 10^{-7}$	5.9578
8951	5236	14187	$-2.1419 \times 10^{-7}$	5.8723
9616	5625	15241	$-1.8024 \times 10^{-7}$	5.7029
10281	6014	16295	$-1.5068 \times 10^{-7}$	5.4498
10946	6403	17349	$-1.2471 \times 10^{-7}$	5.1129
11611	6792	18403	$-1.0172 \times 10^{-7}$	4.6923
12276	7181	19457	$-8.1214 \times 10^{-8}$	4.1879
12941	7570	20511	$-6.2818 \times 10^{-8}$	3.5998
13606	7959	21565	$-4.6220 \times 10^{-8}$	2.9278
14271	8348	22619	$-3.1169 \times 10^{-8}$	2.1722
14936	8737	23673	$-1.7459 \times 10^{-8}$	1.3327
15601	9126	24727	$-4.9171 \times 10^{-9}$	$4.0951 \times 10^{-1}$
47468	27767	75235	$-9.7079 \times 10^{-10}$	$7.4848 \times 10^{-1}$

79335	46408	125743	$-1.9476 \times 10^{-10}$	$4.1945 \times 10^{-1}$
190537	111457	301994	$-1.4274 \times 10^{-12}$	$1.7732 \times 10^{-2}$
10781274	6306641	17087915	$-4.7737 \times 10^{-15}$	$1.8987 \times 10^{-1}$
64497107	37728389	102225496	$-5.7097 \times 10^{-16}$	$8.1273 \times 10^{-1}$
118212940	69150137	187363077	$-1.8767 \times 10^{-16}$	$8.9738 \times 10^{-1}$
171928773	100571885	272500658	$-4.3877 \times 10^{-17}$	$4.4380 \times 10^{-1}$
397573379	232565518	630138897	$-1.1224 \times 10^{-18}$	$6.0709 \times 10^{-2}$
6586818670	3853041921	10439860591	$-6.4797 \times 10^{-21}$	$9.6198 \times 10^{-2}$
72057431991	42150895613	114208327604	$-3.2245 \times 10^{-22}$	$5.7290 \times 10^{-1}$
137528045312	80448749305	217976794617	$-2.7550 \times 10^{-23}$	$1.7830 \times 10^{-1}$
890638885193	520990349522	1411629234715	$-3.6910 \times 10^{-24}$	1.0018
1643749725074	961531949739	2605281674813	$-1.6948 \times 10^{-24}$	1.5669
2396860564955	1402073549956	3798934114911	$-9.5300 \times 10^{-25}$	1.8734
3149971404836	1842615150173	4992586555009	$-5.6592 \times 10^{-25}$	1.9214
3903082244717	2283156750390	6186238995107	$-3.2822 \times 10^{-25}$	1.711
4656193084598	2723698350607	7379891435205	$-1.6742 \times 10^{-25}$	1.242
5409303924479	3164239950824	8573543875303	$-5.1387 \times 10^{-26}$	$5.1451 \times 10^{-1}$

On notera que pour  $N = 301994$ , l'approximation est excellente en précision ( $\left| \frac{m}{d} - X \right| < \frac{1}{2d^2} = \frac{1.77 \times 10^{-2}}{d^2}$ ), c'est effectivement une meilleure approximation, une fraction obtenue dans le développement en fractions continues de  $X$ .

Test d'approximation par défaut de  $X$  avec les fractions :

## 9. Approximations par excès de $X$ par $\frac{m}{d}$

Cela servira pour la démonstration des résultats expérimentaux dans la partie suivante **mais aussi dans le cas  $b_1 > 0$  avec  $v_0 < 0$**

On peut facilement trouver les approximations (par des fractions) successives par excès de  $X$  avec le principe de l'arbre de Stern-Brocot.

Rappel de la méthode :

Initialement,  $a = d = 0$  et  $b = c = 1$ ,  $\frac{1}{0}$  représentant l'infini.

On réitère les étapes suivantes jusqu'à la précision voulue, sachant que l'on n'a pas forcément une meilleure approximation par excès (que celles déjà obtenues) à chaque étape

Si  $\frac{a}{b} < X < \frac{c}{d}$ , alors on compare avec avec la médiane  $\frac{a+c}{b+d}$ .

- Si  $X \leq \frac{a+c}{b+d}$  alors  $\frac{a+c}{b+d}$  est une meilleure approximation par excès et on change  $\frac{c}{d}$  par la médiane
- Si  $X > \frac{a+c}{b+d}$  alors on change  $\frac{a}{b}$  par la médiane

On trouve les résultats suivants :

$m$	$d$	N	$diff = \frac{m}{d} - X$	$d^2 \times  diff $
2	1	3	$2.9049 \times 10^{-1}$	$2.9049 \times 10^{-1}$
7	4	11	$4.0489 \times 10^{-2}$	$6.4782 \times 10^{-1}$
12	7	19	$4.7744 \times 10^{-3}$	$2.3395 \times 10^{-1}$
53	31	84	$1.6613 \times 10^{-4}$	$1.5965 \times 10^{-1}$
359	210	569	$1.2518 \times 10^{-5}$	$5.5205 \times 10^{-1}$
665	389	1054	$2.7677 \times 10^{-7}$	$4.1881 \times 10^{-2}$
16266	9515	25781	$6.5991 \times 10^{-9}$	$5.9746 \times 10^{-1}$
31867	18641	50508	$9.6119 \times 10^{-10}$	$3.3400 \times 10^{-1}$
111202	65049	176251	$1.3650 \times 10^{-10}$	$5.7758 \times 10^{-1}$
301739	176506	478245	$4.9404 \times 10^{-11}$	1.5392
492276	287963	780239	$2.9730 \times 10^{-11}$	2.4653
682813	399420	1082233	$2.1035 \times 10^{-11}$	3.3559

Test d'approximation par excès de  $X$  avec les fractions :   (c'est le même code que pour les approximations par défaut)

## 10. Expression développée de $r_n$

Ce qu'il est essentiel de retenir, c'est que pour une liste de transitions de longueur N :

- $r_n$  est du signe de  $b_1$
- Plus les transitions de "type 1" sont en fin de liste de transitions, plus  $r_N$  est grand
- Plus les transitions de "type 0" sont en début de liste de transitions, plus  $r_N$  est grand
- La permutation de deux transitions successives n'a pas une grande incidence sur la valeur de  $r_N$

On énonce simplement une formule que l'on va démontrer par récurrence, après avoir regardé sur un exemple l'idée de la formule.

- si  $m_n = 0$  alors  $r_n = 0$
- si  $m_n > 0$  alors  $r_n = \frac{b_1}{2^n} \sum_{i=1}^{m_n} 3^{m_n-i} \times 2^{\text{ind}(i)} = \frac{3^{m_n} b_1}{2^n} \sum_{i=1}^{m_n} \frac{2^{\text{ind}(i)}}{3^i}$

avec

- $m_n$  est le nombre de transitions de "type 1" parmi les  $n$  premières transitions de L
- $\text{ind}(i)$  est l'indice (en partant de 0) de la  $i^{\text{ème}}$  transition (en partant de 1) de "type 1" dans la liste L

L'intérêt de cette formule est de voir :

- que pour  $b_1 \neq 1$ , la valeur de  $r_n$  est celle obtenue par  $b_1 = 1$  multipliée par  $b_1$
- que pour  $m_n$  fixé,  $r_n$  sera plus grand quand les valeurs  $\text{ind}(i)$  seront plus grandes, c'est à dire quand les transitions de "type 1" seront plus vers la fin ou ce qui est équivalent, quand les transitions de "type 0" seront en tête de liste (du moins autant que possible selon les contraintes imposées à L).
- que la permutation de deux transitions (\*10\* en \*01\*), pour la  $i^{\text{ème}}$  transition de type "1", génère une modification de  $r_n$  égale à  $\frac{3^{m_n} b_1}{2^n} \times \frac{2^{\text{ind}(i)}}{3^i}$  car  $\text{ind}(i)$  est augmenté de 1 et les autres termes sont inchangés.

$$\text{L'écart relatif est donc } \frac{\frac{2^{\text{ind}(i)}}{3^i}}{\sum_{i=1}^{m_n} \frac{2^{\text{ind}(i)}}{3^i}}$$

- que si deux listes de transitions ayant la même longueur  $N$  et le même nombre  $m_N$  de transitions de type "1"

(donc même facteur  $\frac{3^{m_N} b_1}{2^N}$ ) et que si en plus

- elles ne diffèrent que de  $p$  permutations (toutes dans le même sens pour maximiser l'écart)
- que pour chaque transition de "type 1" de chacune des listes, on a  $1 < \frac{3^i}{2^{\text{ind}(i)}} < 2$  soit  $\frac{1}{2} < \frac{2^{\text{ind}(i)}}{3^i} < 1$

alors l'écart relatif de  $r_N$  pour les deux listes est inférieur à  $\frac{2p}{m_N}$ , ce qui peut être très faible.

Par exemple, dans le cas de la suite de Syracuse standard, on considère la liste de transitions  $L = "1101"$ .

- $r_0 = 0$
- $t_0 = 1$  donc  $r_1 = \frac{1}{2}(3r_0 + 1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} \times 3^0 \times 2^1 = \frac{3^1}{2^1} \times \frac{2^0}{3^1}$
- $t_1 = 1$  donc  $r_2 = \frac{1}{2}(3r_1 + 1) = \frac{1}{2^2}(2^1 \times 3r_1 + 2^1) = \frac{1}{2^2}(3 \times 1 + 2^1) = \frac{1}{2^2}(3 \times 2^0 + 2^1) = \frac{3^2}{2^2} \left( \frac{2^0}{3^1} + \frac{2^1}{3^2} \right)$
- $t_2 = 0$  donc  $r_3 = \frac{1}{2}r_2 = \frac{3^2}{2^3} \left( \frac{2^0}{3^1} + \frac{2^1}{3^2} \right)$
- $t_3 = 1$  donc  $r_4 = \frac{1}{2}(3r_3 + 1) = \frac{1}{2^4}(2^3 \times 3r_3 + 2^3) = \frac{1}{2^4}(3(3 \times 2^0 + 2^1) + 2^3) = \frac{1}{2^4}(3^2 \times 2^0 + 3^1 \times 2^1 + 3^0 \times 2^3)$   
 $= \frac{3^3}{2^4} \left( \frac{2^0}{3^1} + \frac{2^1}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} \right)$

On démontre maintenant la formule de  $r_n$  par récurrence.

On vérifie la formule au rang 1 :

- Si  $L = "0"$  alors  $m_1 = 0$  et  $r_1 = 0$  et il n'y a pas de terme dans la somme
- Si  $L = "1"$  alors  $m_1 = 1$  et  $r_1 = \frac{b_1}{2} = \frac{b_1}{2} \times 3^0 \times 2^0 = \frac{3^1 b_1}{2^1} \times \frac{2^0}{3^1}$ , ce qui termine la vérification au rang 1.

On suppose la formule vraie pour le rang  $n$  et on montre qu'elle est vraie pour le rang  $n + 1$

- $t_n = 0$  alors  $m_{n+1} = m_n$  et  $r_{n+1} = \frac{r_n}{2} = \frac{b_1}{2^{n+1}} \sum_{i=1}^{m_n} 3^{m_n - i} \times 2^{\text{ind}(i)} = \frac{b_1}{2^{n+1}} \sum_{i=1}^{m_{n+1}} 3^{m_{n+1} - i} \times 2^{\text{ind}(i)}$
- $t_n = 1$  alors  $m_{n+1} = m_n + 1$  et  $r_{n+1} = \frac{3r_n + b_1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}(3 \times 2^n r_n + 2^n b_1) =$   
 $\frac{1}{2^{n+1}} \left( \left( 3 b_1 \sum_{i=1}^{m_n} 3^{m_n - i} \times 2^{\text{ind}(i)} \right) + 2^n b_1 \right) = \frac{b_1}{2^{n+1}} \left( \left( \sum_{i=1}^{m_n} 3^{m_{n+1} - i} \times 2^{\text{ind}(i)} \right) + 3^0 \times 2^n \right) =$   
 $\frac{b_1}{2^{n+1}} \sum_{i=1}^{m_{n+1}} 3^{m_{n+1} - i} \times 2^{\text{ind}(i)}$

Ceci termine la démonstration de la formule.

## 11. Construction de la liste de transitions JGL(N) pour $v_0 > 0$ :

JGL(N) est constituée des  $N$  transitions spécifiques  $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}$ .

JGL(N) respecte deux contraintes :

1. Pour tout  $0 < n \leq N$ ,  $v_n \geq v_0$ , c'est-à-dire, que  $v_0$  est le plus petit élément ou  $\frac{v_n}{v_0} \geq 1$
2. La priorité est donnée aux transitions de "type 0" donc pour tout  $0 < n \leq N$ ,  $\frac{v_n}{v_0}$  est minimum

Remarque : Si l'on a JGL(N) alors on a aussi la valeur de  $r_N$  pour cette liste de transitions.

La liste de transitions JGL(N) est la plus longue liste de transitions qui maximise  $r_N$  pour une valeur de  $m$  donnée, avec  $v_0$  le minimum de  $v_n$ , puisque les transitions de "type 1" sont mises le plus tard possible, ce qui maximise  $r_n$  d'après le paragraphe précédent (cf IV-10).

Etapas de construction :

Ce sont les mêmes pour  $b_1 > 1$ , seules les bornes que l'on obtient sont à multiplier par  $b_1$  car  $r_n$  est multiplié par  $b_1$

a. **JGL(1) :**

Il s'agit de déterminer la transition  $t_0$

On a  $v_0 = \frac{3^0}{2^0} v_0 + r_0$  avec  $r_0 = 0$

Pour avoir  $v_1 \geq v_0$ , nécessairement  $t_0 = 1$  (de "type 1") et

$$v_1 = \frac{3v_0 + b_1}{2} = \frac{3^1}{2^1} v_0 + r_1 \text{ avec } r_1 = \frac{3r_0 + b_1}{2} = \frac{b_1}{2} \text{ et } m_1 = 1, d_1 = 0$$

et JGL(1) = "1"

b. **JGL(2) :**

Il s'agit de déterminer la transition  $t_1$

On teste si l'on peut faire une transition de "type 0" puisqu'on leur donne la priorité, car on doit les faire le plus tôt possible.

$$\text{Si } t_1 = 0 \text{ alors } v_2 = \frac{v_1}{2} = \frac{3}{4} v_0 + \frac{r_1}{2} = \frac{3}{4} v_0 + \frac{b_1}{4}$$

$$\text{Et la condition } v_2 \geq v_0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} v_0 + \frac{b_1}{4} \geq v_0 \Leftrightarrow v_0 \leq b_1$$

On teste alors  $v_0 = b_1$ , donc  $v_1 = 2b_1$  et  $v_2 = b_1$ , c'est le cycle trivial, même pour  $b_1 > 1$ , on le retrouve.

Très bien, mais comme on cherche d'éventuels autres cycles et que la suite de Syracuse est vérifiée pour tout  $v_0 \leq 2^{68}$  (ou  $v_0 < \max \text{Syr}_{b1}$  pour  $b_1 \neq 1$ ) alors forcément  $v_0 > b_1$  et donc, nécessairement,  $t_1 = 1$

$$\text{Donc } v_2 = \frac{3v_1 + b_1}{2} = \frac{3\left(\frac{3}{2} v_0 + \frac{b_1}{2}\right) + b_1}{2} = \frac{9}{4} v_0 + \frac{5b_1}{4} = \frac{3^2}{2^2} v_0 + \frac{5b_1}{4} \text{ ou } r_2 = \frac{3r_1 + b_1}{2} = \frac{5b_1}{4}$$

Finalement  $m_2 = 2$ ,  $d_2 = 0$  et

JGL(2) = "11"

c. **JGL(3) :**

Il s'agit de déterminer la transition  $t_2$

Comme  $v_2 > \frac{9}{4} v_0$ , alors la transition de "type 0" ( $t_2 = 0$ ) est possible car  $\frac{v_2}{2} \geq \frac{9}{8} v_0 \geq v_0$

$$\text{Alors } v_3 = \frac{3^2}{2^3} v_0 + \frac{5b_1}{8} \text{ avec } r_3 = \frac{5b_1}{8}, m_3 = 2, d_3 = 1$$

et JGL(3) = "110"

**d. JGL(4) :**

Il s'agit de déterminer la transition  $t_3$ , en testant d'abord une transition de "type 0"

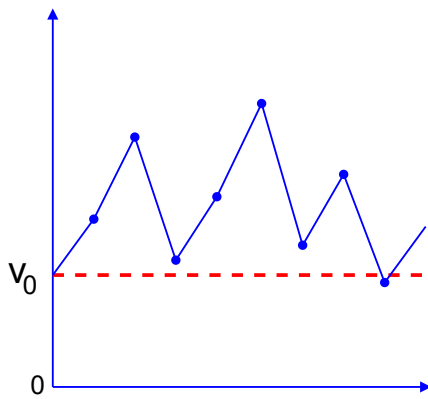
$$\text{Si } t_3 = 0 \text{ alors } v_4 = \frac{9}{16}v_0 + \frac{5b_1}{16}$$

Et la condition  $v_4 \geq v_0 \Leftrightarrow \frac{9}{16}v_0 + \frac{5b_1}{16} \geq v_0 \Leftrightarrow v_0 \leq \frac{16}{7} \times \frac{5b_1}{16} = \frac{5b_1}{7}$ , ce qui est en contradiction avec

$$v_0 \geq \text{maxSyr\_b1} \quad \text{donc } t_3 = 1 \text{ et } r_4 = \frac{3r_3 + b_1}{2} = \frac{23b_1}{16}, m_4 = 3, d_4 = 1$$

et JGL(4) = "1101"

**e. Cas général, construction de JGL(n+1) à partir de JGL(n) :**



Plus généralement, on suppose JGL(n) construite donc  $v_n = \frac{3^{m_n}}{2^n}v_0 + r_n \geq v_0$  et on cherche à construire JGL(n+1), c'est-à-dire à déterminer  $t_n$ , en testant si une transition de "type 0" est possible.

$$\text{Est-ce que } v_{n+1} = \frac{v_n}{2} = \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}}v_0 + \frac{r_n}{2} \geq v_0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}}\right)v_0 \leq \frac{r_n}{2} ?$$

- Si  $\frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} > 1 \Leftrightarrow m_n \text{Ln}3 - (n+1) \text{Ln}2 > 0$  alors l'inégalité est vraie pour tout  $n > 0$  car  $r_n > 0$  et la fonction logarithme népérien est croissante.

Dans ce cas,  $t_n = 0$  et JGL(n+1) = JGL(n) + "0"

- Si  $\frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} < 1$  alors  $t_n = 0$  est possible si

$$\left(1 - \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}}\right)v_0 \leq \frac{r_n}{2} \Leftrightarrow \frac{2^{n+1} - 3^{m_n}}{2^n}v_0 \leq r_n \Leftrightarrow v_0 \leq \frac{2^n r_n}{2^{n+1} - 3^{m_n}} = \text{VMax}(n)$$

Si  $\text{VMax}(n) \leq \text{maxSyr\_l}$  alors avec  $t_n = 0$ , on aurait éventuellement un cycle trivial. On élimine ce cas et donc  $t_n = 1$ , donc JGL(n+1) = JGL(n) + "1".

La première fois que  $\text{VMax}(n) > \text{maxSyr\_l}$  alors  $t_n = 0$  est possible et donc JGL(n+1) = JGL(n) + "0", c'est la condition nécessaire pour avoir un cycle non trivial de longueur  $n+1$ .

Comme  $r_{n+1} > 0$ , pour avoir un cycle de longueur  $n+1$ , il faut impérativement que  $v'_{n+1} < v_0$  et  $r_{n+1}$  soit suffisamment grand pour que  $v_{n+1} = v'_{n+1} + r_{n+1} \geq v_0$ , l'égalité signifierait un cycle (et  $n+1$  serait la longueur minimale d'un cycle non trivial).

On peut alors tester quand cette inégalité est vraie en faisant tout simplement des calculs, étape par étape, c'est facile à programmer.

## 12. Construction de la liste de transitions JGL(N) pour $v_0 < 0$ :

JGL(N) est constituée des N transitions spécifiques  $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}$ .

JGL(N) respecte deux contraintes :

1. Pour tout  $0 < n \leq N$ ,  $v_n \leq v_0 < 0$ , c'est-à-dire que  $v_0$  est le plus grand élément ou  $\frac{v_n}{v_0} \geq 1$
2. La priorité est donnée aux transitions de "type 0" donc pour tout  $0 < n \leq N$ ,  $\frac{v_n}{v_0}$  est minimum

Remarque : Si l'on a JGL(N) alors on a aussi la valeur de  $r_N$  pour cette liste de transitions.

La liste de transitions JGL(N) est la plus longue liste de transitions qui maximise  $r_N$  pour une valeur de  $m$  donnée, avec  $v_0$  le maximum de  $v_n$ , puisque les transitions de "type 1" sont mises le plus tard possible, ce qui maximise  $r_n$  d'après le paragraphe précédent (cf IV-10).

On appelle la liste JGL car elle est identique à celle décrite pour le cas  $v_0 > 0$ .

En effet, on peut rassembler les deux cas de la façon suivante :

1. Pour tout  $0 < n \leq N$ ,  $|v_n| \geq |v_0|$ , c'est-à-dire que  $\frac{v_n}{v_0} \geq 1$
2. La priorité est donnée aux transitions de "type 0" donc pour tout  $0 < n \leq N$ ,  $\frac{v_n}{v_0}$  est minimum

On la considère juste à des endroits différents, à savoir pour les "approximations de X" par défaut quand  $v_0 > 0$  et pour les "approximations de X" par excès quand  $v_0 < 0$

Etapas de construction :

Ce sont les mêmes pour  $b_1 > 1$ , seules les bornes que l'on obtient sont à multiplier par  $b_1$  car  $r_n$  est multiplié par  $b_1$

### a. JGL(1) :

Il s'agit de déterminer la transition  $t_0$

On a  $v_0 = \frac{3^0}{2^0} v_0 + r_0$  avec  $r_0 = 0$

Pour avoir  $v_1 \leq v_0$ , nécessairement  $t_0 = 1$  (de "type 1") et

$$v_1 = \frac{3v_0 + b_1}{2} = \frac{3^1}{2^1} v_0 + r_1 \text{ avec } r_1 = \frac{3r_0 + b_1}{2} = \frac{b_1}{2} \text{ et } m_1 = 1, d_1 = 0$$

et JGL(1) = "1"

Remarques :

- $v_1 = \frac{3v_0 + b_1}{2} \leq v_0 \Leftrightarrow v_0 \leq -b_1$
- $v_1 = v_0$  pour  $v_0 = -b_1$ , on retrouve le cycle trivial.

Comme on suppose la suite testée pour  $-\maxSyr\_bl < v_0 < 0$ , on est dans le cas  $v_0 < -\maxSyr\_bl < -b_1$

**b. JGL(2) :**

Il s'agit de déterminer la transition  $t_1$

On teste si l'on peut faire une transition de "type 0" puisqu'on leur donne la priorité, car on doit les faire le plus tôt possible.

$$\text{Si } t_1 = 0 \text{ alors } v_2 = \frac{v_1}{2} = \frac{3}{4}v_0 + \frac{r_1}{2} = \frac{3}{4}v_0 + \frac{b_1}{4}$$

Et la condition  $v_2 \leq v_0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}v_0 + \frac{b_1}{4} \leq v_0 \Leftrightarrow v_0 \geq b_1$ , ce qui est impossible car  $v_0 < 0$  et  $b_1 > 0$ .

Donc, nécessairement,  $t_1 = 1$

$$\text{Et } v_2 = \frac{3v_1 + b_1}{2} = \frac{3\left(\frac{3}{2}v_0 + \frac{b_1}{2}\right) + b_1}{2} = \frac{9}{4}v_0 + \frac{5b_1}{4} = \frac{3^2}{2^2}v_0 + \frac{5b_1}{4} \text{ ou } r_2 = \frac{3r_1 + b_1}{2} = \frac{5b_1}{4}$$

Finalement  $m_2 = 2, d_2 = 0$  et

JGL(2) = "11"

**c. JGL(3) :**

Il s'agit de déterminer la transition  $t_2$ , en testant d'abord une transition de "type 0"

$$\text{Si } t_2 = 0 \text{ alors } v_3 = \frac{v_2}{2} = \frac{9}{8}v_0 + \frac{5}{8}b_1$$

Et  $v_3 \leq v_0 \Leftrightarrow v_0 \leq -5b_1$ , ce qui est vrai car on est dans le cas  $v_0 < -\maxSyr\_bl$

$$\text{Alors } v_3 = \frac{3^2}{2^3}v_0 + \frac{5b_1}{8} \text{ avec } r_3 = \frac{5b_1}{8}, m_3 = 2, d_3 = 1$$

et JGL(3) = "110"

**d. JGL(4) :**

Il s'agit de déterminer la transition  $t_3$ , en testant d'abord une transition de "type 0"

$$\text{Si } t_3 = 0 \text{ alors } v_4 = \frac{9}{16}v_0 + \frac{5b_1}{16}$$

Et la condition  $v_4 \leq v_0 \Leftrightarrow \frac{9}{16}v_0 + \frac{5b_1}{16} \leq v_0 \Leftrightarrow v_0 \geq \frac{16}{7} \times \frac{5b_1}{16} = \frac{5b_1}{7} > 0$ , ce qui est en contradiction avec

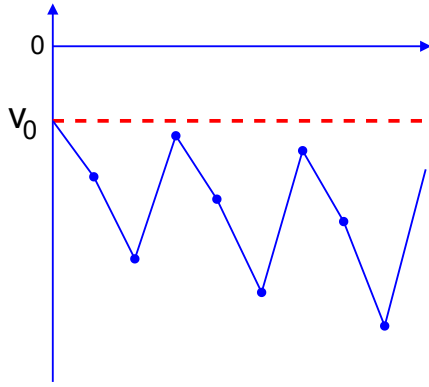
$$v_0 < 0 \text{ donc } t_3 = 1 \text{ et } r_4 = \frac{3r_3 + b_1}{2} = \frac{23b_1}{16}, m_4 = 3, d_4 = 1$$

et JGL(4) = "1101"

On retrouve bien le même début de JGL que pour  $v_0 > 0$

**e. Cas général, construction de JGL(n+1) à partir de JGL(n) :**





Plus généralement, on suppose JGL( $n$ ) construite donc  $v_n = \frac{3^{m_n}}{2^n} v_0 + r_n \leq v_0$  et on cherche à construire JGL( $n+1$ ), c'est-à-dire à déterminer  $t_n$ , en testant si une transition de "type 0" est possible.

Est-ce que  $v_{n+1} = \frac{v_n}{2} = \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} v_0 + \frac{r_n}{2} \leq v_0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}}\right) v_0 \geq \frac{r_n}{2}$  ?

- Si  $\frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} < 1 \Leftrightarrow m_n \text{Ln}3 - (n+1) \text{Ln}2 < 0$  alors l'inégalité est toujours fautive pour tout  $n > 0$  car  $r_n > 0$  et  $v_n < 0$  (et la fonction logarithme népérien est croissante pour la transformation).

Dans ce cas,  $t_n = 1$  et JGL( $n+1$ ) = JGL( $n$ ) + "1"

- Si  $\frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} > 1$  alors  $t_n = 0$  est possible si

$$\left(1 - \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}}\right) v_0 \geq \frac{r_n}{2} \Leftrightarrow \frac{2^{n+1} - 3^{m_n}}{2^n} v_0 \geq r_n \Leftrightarrow v_0 \leq \frac{2^n r_n}{2^{n+1} - 3^{m_n}} = \text{VMax}(n)$$

C'est donc toujours possible d'avoir des valeurs de  $v_0$  qui vérifient cette inégalité, donc  $t_n = 0$  et donc JGL( $n+1$ ) = JGL( $n$ ) + "0".

Mais, comme  $r_{n+1} = \frac{r_n}{2}$  et  $v'_{n+1} < v_0$ , pour avoir un cycle de longueur  $n+1$ , il faut impérativement que  $r_{n+1} > 0$  soit suffisamment grand pour que  $v_{n+1} = v'_{n+1} + r_{n+1} \geq v_0$ , l'égalité signifierait un cycle.

Donc une condition nécessaire pour avoir un cycle, est  $\text{VMax}(n) \leq v_0 < 0$ , l'inégalité précédente dans l'autre sens.

Si  $\text{VMax}(n) \geq -\text{maxSyr\_bl}$ , alors ce serait un cycle trivial, ce qui ne nous intéresse pas ici.

Si  $\text{VMax}(n) \leq -\text{maxSyr\_bl}$  alors la condition nécessaire pour avoir un cycle de longueur  $n+1$  est remplie (reste à trouver un éventuel  $v_0$  pour lequel l'égalité serait vérifiée)

On peut alors tester quand cette inégalité est vraie en faisant tout simplement des calculs, étape par étape, c'est facile à programmer.

### 13. Longueur minimale d'un cycle obtenue par calculs étape par étape pour $v_0 > 0$

Dans la construction étape par étape de la liste de transitions JGL, on liste les valeurs de  $V_{\text{Max}}(n)$  croissantes.

Pour la première valeur de  $V_{\text{Max}}(n)$  qui est supérieure à  $\text{maxSyr\_bl}$ , on obtient  $n + 1$ , la longueur minimale d'un cycle non trivial (s'il existe).

Si  $V_{\text{Max}}(n) > \text{maxSyr\_bl}$ , on change la transition (ce qui correspond à une simple permutation avec la suivante) et on indique qu'il faudrait étudier cette longueur  $n + 1$ . Si l'on cherche à construire JGL pour des valeurs de  $N$  bien supérieures à la valeur minimale d'un cycle, ce cas va se répéter de plus en plus souvent et cela n'a pas d'intérêt.

Si l'on fixe une valeur arbitraire de  $\text{maxSyr\_bl}$  très élevée, on obtiendra alors la liste des valeurs de  $v_0$  pour laquelle il faudrait tester la suite pour augmenter la longueur minimale d'un cycle non trivial.

Dans l'algorithme de calcul, on prend  $b_1 = 1$ , mais si  $b_1 > 1$ , alors comme  $r_n$  est multiplié par  $b_1$  par rapport à la valeur obtenue avec  $b_1 = 1$ , la borne obtenue est aussi à multiplier par  $b_1$ . Cela explique aussi la forme de

$$\text{maxSyr\_bl} = 2^{N_0 + B_1} \text{ avec } B_1 = \left\lceil \frac{\text{Ln}(|b_1|)}{\text{Ln}2} \right\rceil \text{ qui majore la valeur de } v_0 \text{ pour la ligne correspondant à } b_1 = 1$$

On obtient les résultats suivants, les valeurs de  $v_0$  sont à multiplier par  $b_1$  :

$m$	$d$	$n$	$r_n$	maximum value for $v_0$
1	0	1	0.5	$1 \sim 2^0$
3	1	4	1.438	$4.6 \sim 2^{2.202}$
5	2	7	2.492	$24.54 \sim 2^{4.617}$
17	9	26	8.172	$108.01 \sim 2^{6.755}$
29	16	45	13.93	$281.94 \sim 2^{8.139}$
41	23	64	19.766	$867.14 \sim 2^{9.760}$
94	54	148	45.156	$2419.68 \sim 2^{11.241}$
147	85	232	70.599	$4862.05 \sim 2^{12.247}$
200	116	316	96.094	$9266.54 \sim 2^{13.178}$
253	147	400	121.643	$19584.90 \sim 2^{14.257}$
306	178	484	147.246	$72058.07 \sim 2^{16.137}$
971	567	1538	466.89	$238670.39 \sim 2^{17.865}$
1636	956	2592	786.548	$420841.76 \sim 2^{18.683}$
2301	1345	3646	1106.22	$620858.37 \sim 2^{19.244}$
2966	1734	4700	1425.906	$841477.43 \sim 2^{19.683}$
3631	2123	5754	1745.606	$1086054.96 \sim 2^{20.051}$
4296	2512	6808	2065.32	$1358717.75 \sim 2^{20.374}$
...				

et au bout de plusieurs longues heures (ou éventuellement journées) :

$m$	$d$	$n$	$r_n$	max such as $v_0 \leq 2^{\text{max}}$
79335	46407	125742	38152.167	32.277
190537	111456	301993	91629.092	39.369
10781274	6306640	17087914	5184696.98	47.594
64497107	37728388	102225495	31016552.171	50.657
118212940	69150136	187363076	56848407.453	52.262
171928773	100571884	272500657	82680262.824	54.359
397573379	232565517	630138896	191192380.914	59.648

6586818670	3853041920	10439860590	3167590210.299	67.084
72057431991	42150895612	114208327603	34652299930.941	71.413

Test pour obtenir la valeur maximale de  $v_0$  :  en sachant que la suite a été vérifiée jusqu'à  $2^{\wedge}$

On remarque que :

- puisque la suite de Syracuse a été vérifiée pour tout  $n \leq 2^{68}$ , cette inégalité n'est jamais vraie pour des valeurs de  $n \leq 10439860590$ , car  $2^{67.084} < 2^{68}$  même s'il y a de petites erreurs de troncatures, liées aux nombreux calculs. Evidemment, si la suite était vérifiée pour des valeurs plus grandes de  $v_0$ , la valeur serait encore plus grande pour que l'inégalité soit vérifiée.

- $\frac{m_n}{d_n + 1}$  sont exactement et uniquement celles qui correspondent aux approximations par défaut de

$$X = \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}3 - \text{Ln}2}$$

La liste de transitions JGL( $n$ ) remplit bien les 2 conditions optimales pour avoir un cycle (cf IV-4-1)

On peut donc affirmer, uniquement grâce aux résultats obtenus par le calcul, dans le cas où  $\frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} < 1$ , que :

- Pour  $n \leq 10439860590$ ,  $t_n$  est de "type 1" et  $\text{JGL}(n+1) = \text{JGL}(n) + "1"$
- Pour  $n > 10439860590$ , il se peut que, de temps en temps (peut-être une fois toutes les 10 milliards de transitions), une transition  $t_n$  soit de "type 0", et alors  $t_{n+1}$  serait de "type 1" (et sinon, elle aurait été de "type 0"), c'est une simple interversion de deux transitions.

Conclusion des calculs sachant que la suite a été vérifiée pour  $2^{68}$  :

- **Le longueur minimale pour un cycle est 114208327604 pour la suite de Syracuse réduite  $v$**
- **Le longueur minimale pour un cycle est 186265759595 pour la suite de Syracuse standard  $u$**  car on ajoute  $m$  étapes

On s'aperçoit qu'il serait nécessaire de vérifier la suite pour  $n \leq 2^{72}$  pour augmenter la longueur minimale d'un cycle non trivial, pour laquelle il faudrait bien plus de temps de calcul.

Pour  $b_1 > 1$ , les bornes sont à adapter et si l'on a vérifié et recherché tous les cycles pour  $v_0 < 2^{17+B_1}$ , alors on peut affirmer qu'un autre cycle, s'il existe, a une longueur supérieure ou égale à  $1538 + 1 = 1539$  pour  $v$  soit  $1539 + 971 = 2510$  pour  $u$

#### 14. Longueur minimale d'un cycle obtenue par calculs étape par étape pour $v_0 < 0$

Dans la construction étape par étape de la liste de transitions JGL, on liste les valeurs de  $|\text{VMax}(n)|$  croissantes.

Pour la première valeur de  $|\text{VMax}(n)|$  qui est supérieure à  $\text{maxSyr\_bl}$ , on obtient  $n+1$ , la longueur minimale d'un cycle non trivial (s'il existe).

Si l'on fixe une valeur arbitraire de  $\text{maxSyr\_bl}$  très élevée, on obtiendra alors la liste des valeurs de  $v_0$  pour laquelle il faudrait tester la suite pour augmenter la longueur minimale d'un cycle non trivial.

Dans l'algorithme de calcul, on prend  $b_1 = -1$  et  $v_0 > 0$  (ce qui est équivalent à  $b_1 = 1$  et  $v_0 < 0$ ), mais si  $b_1 < -1$ , alors comme  $r_n$  est multiplié par  $b_1$  par rapport à la valeur obtenue avec  $b_1 = -1$ , la borne obtenue est aussi à

multiplier par  $|b_1|$ . Cela explique aussi la forme de  $\text{maxSyr\_bl} = 2^{N_0+B_1}$  avec  $B_1 = \lceil \frac{\text{Ln}(|b_1|)}{\text{Ln}2} \rceil$  qui majore la valeur de  $v_0$  pour la ligne correspondant à  $b_1 = -1$

On obtient les résultats suivants, les valeurs de  $v_0$  sont à multiplier par  $|b_1|$  :

$m$	$d$	$n$	$r_n$	maximum value for $v_0$
-----	-----	-----	-------	-------------------------

2	0	2	-1.25	$5 \sim 2^{2.322}$
7	3	10	-3.679	$27.10 \sim 2^{4.760}$
12	6	18	-5.984	$219.31 \sim 2^{7.777}$
53	30	83	-25.682	$6143.16 \sim 2^{12.585}$
159	92	251	-77.208	$6143.16 \sim 2^{12.585}$
212	123	335	-103.052	$6143.16 \sim 2^{12.585}$
318	185	503	-154.901	$6143.16 \sim 2^{12.585}$
359	209	568	-172.902	$81063.35 \sim 2^{16.307}$
665	388	1053	-319.971	$3664765.05 \sim 2^{21.805}$
1330	777	2107	-639.956	$3664765.05 \sim 2^{21.805}$
1995	1166	3161	-959.955	$3664765.05 \sim 2^{21.805}$
16266	9514	25780	-7822.559	$153625412.52 \sim 2^{27.195}$
31867	18640	50507	-15325.01	$1054720842.54 \sim 2^{29.974}$
...				

et au bout de plusieurs longues heures (ou éventuellement journées) :

$m$	$d$	$n$	$r_n$	max such as $v_0 \leq 2^{\max}$
301739	176505	478244	-145106.21	$20520083760.05 \sim 2^{34.256}$
6398923	3743129	10142052	-3077233.924	$1045634943660.33 \sim 2^{39.928}$
32153285	18808465	50961750	-15462461.988	$277238656568662.88 \sim 2^{47.978}$
3406231638	1992517776	5398749414	-1638051164.939	$978964046509643500 \sim 2^{59.764}$
32536519971	19032644086	51569164057	-15646758670.581	$141656386397821760000 \sim 2^{66.941}$
39123338641	22885686007	62009024648	-18814348880.721	$208562895352680150000 \sim 2^{67.499}$
45710157311	26738727928	72448885239	-21981939090.829	$314192776498692500000 \sim 2^{68.090}$
52296975981	30591769849	82888745830	-25149529300.905	$505854005668244600000 \sim 2^{68.777}$
58883794651	34444811770	93328606421	-28317119510.949	$960856011060574000000 \sim 2^{69.703}$
65470613321	38297853691	103768467012	-31484709720.961	$3.41 \times 10^{21} \sim 2^{71.532}$

Test pour obtenir la valeur maximale de  $v_0$  :  en sachant que la suite a été vérifiée jusqu'à  $2^{\wedge}$

On peut faire varier la précision pour voir plus ou moins de multiples des fractions irréductibles :

Test

On remarque que :

- $\frac{m_n}{d_n + 1}$  qui donnent une valeur de  $V_{\max}(n)$  significativement différente à la valeur maximale de  $v_0$  sont celles et uniquement celles qui correspondent aux approximations par excès de  $X = \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}3 - \text{Ln}2}$ .
- Les autres fractions correspondent à des fractions non irréductibles, dont les numérateurs et dénominateurs sont des multiples des fractions correspondant aux approximations par excès de  $X$

La liste de transitions  $JGL(n)$  remplit bien les 2 conditions optimales pour avoir un cycle (cf IV-5-1)

Pour  $b_1 > 1$ , les bornes sont à adapter et si l'on a vérifié et recherché tous les cycles pour  $v_0 < 2^{17+B_1}$ , alors on peut affirmer qu'un autre cycle, s'il existe, a une longueur supérieure ou égale à  $1053 + 1 = 1054$  pour  $v$  soit  $1054 + 665 = 1719$  pour  $u$

On s'aperçoit qu'il serait nécessaire de vérifier la suite pour  $n \leq 2^{22+B_1}$  pour augmenter la longueur minimale d'un cycle non trivial à 25781 pour  $v$ , ce qui peut demander un temps de calcul très long.

## 15. Liste de transitions JGL étape par étape

On s'aperçoit que dans les paragraphes précédents de la construction de JGL, les cas sont mis dans un ordre différents mais correspondent à la même chose

Pour  $v_0 > 0$ , tant que  $|V_{\text{Max}}(n)| < \text{maxSyr}_{b1}$  et pour  $v_0 < 0$ , pour tout  $n$ , on a :

$t_n = 0$  si et seulement si  $\frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} > 1 \Leftrightarrow m_n \text{Ln}3 - (n+1) \text{Ln}2 > 0$  car la fonction logarithme népérien est croissante.

On peut aussi proposer une version simplifiée du calcul de  $JGL(n)$  :

JavaScript code not available in this document.

On obtient  $JGL(65) = "11011011010110110101101101101011011010110110110101101101011011011011"$

Test de la version courte de  $JGL(n)$  :

## 16. Expression de $m_N$ de $JGL(N)$

Pour aller un peu plus loin, essayons de trouver une expression  $m_N$  pour la liste de transitions frontière JGL

Considérons le cas général d'une suite définie ainsi :

Soit  $f(n) = a m_{n-1} - n b$ , avec  $a > 0$  et  $b > 0$

- $m_0 = 0$
- $m_n = m_{n-1} + 1$  si  $f(n) < 0$
- $m_n = m_{n-1}$  si  $f(n) \geq 0$

On s'aperçoit que la suite de Syracuse réduite, correspond au cas particulier  $a = \text{Ln}3$  et  $b = \text{Ln}2$  d'après le paragraphe précédent. Attention,  $m_n$  est indicé à partir de 1, c'est à dire que le nombre de transitions de "type 1" de  $JGL(N)$  est  $m_N$  pour  $N \geq 1$

La condition  $f(n) < 0$  est équivalente à  $a m_{n-1} < n b$  ou encore  $m_{n-1} < \frac{n b}{a}$ , comme  $a > 0$

La suite  $m_n$  augmentera de 1 à chaque étape tant que  $m_{n-1} < \frac{n b}{a} \leq \lceil \frac{n b}{a} \rceil \Leftrightarrow m_{n-1} \leq \lfloor \frac{n b}{a} \rfloor$ , donc  $m_n \geq \lceil \frac{n b}{a} \rceil$ , sinon, elle restera constante.

On a donc  $m_n = \min(n, \lceil \frac{n b}{a} \rceil)$

Dans le cas de la suite de Syracuse réduite, on a :

$$\text{Pour } N \geq 1, m_N = \lceil \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}3} N \rceil$$

JavaScript code not available in this document.

Test de  $m_N$  et  $JGL(N)$  :

## 17. Conclusion

On a bien retrouvé le résultat le résultat de Shalom Eliahou dans le cas de la conjecture de la suite Syracuse standard.

- Pour  $v_0 > 0$  (ou  $b_1 > 0$ ), en testant la suite jusqu'à  $2^{N_0+B_1}$  (pour  $b_1 < 1024$  et  $N_0 = 17$ ), on a montré que le longueur minimale d'un cycle pour  $v$  est 1539
- Pour  $v_0 < 0$  (ou  $b_1 < 0$ ), en testant la suite jusqu'à  $2^{N_0+B_1}$  (pour  $b_1 < 1024$  et  $N_0 = 17$ ), on a montré que le longueur minimale d'un cycle pour  $v$  est 1054

On pourrait s'arrêter à ce stade, mais, dans la partie suivante, on va étudier mathématiquement quelques propriétés de la liste de transitions JGL pour retrouver ce résultats instantanément et même avoir un moyen bien plus rapide d'obtenir la liste de transitions JGL.

## V. Démonstration des observations de la partie précédente

Cette partie est un peu plus technique, elle peut parfaitement être ignorée en première lecture en se contentant des résultats obtenus informatiquement.

### 1. Retour sur la construction de JGL et la longueur minimale d'un cycle non trivial

Comment déterminer la longueur minimale d'un éventuel cycle **non trivial** à partir des listes de transitions et de  $v'$  ?

On se place ici dans le cas  $v_0 > 0$  (ou  $b_1 > 0$  de la première définition)

On reprend le paragraphe IV-4

Inversement, si l'on veut tester s'il existe un cycle de longueur  $N$ , **non trivial**, en calculant  $v_0$ , la solution minimale qui suit  $L_N$  avec l'algorithme du "Théorème 0", puis tous les termes jusqu'à  $v_N$  et si  $v_N = v_0$ , on a trouvé un cycle. Autant dire qu'il vaudrait mieux tester directement toutes les valeurs de  $1 < v_0 < 2^N$

On peut faire plus simple, ou du moins réduire le temps de "test" pour chaque liste  $L_N$ , en imposant que  $v_0$  corresponde à la valeur minimale de  $v_n$  pour  $0 \leq n < N$ .

Dans le cas d'un cycle, on ne conserve donc qu'un seul représentant de toutes les permutations circulaires d'une liste, sans perte de généralité.

Si pour une liste  $L_N$ , on est toujours dans le "cas 0", soit  $\frac{3^{m_n}}{2^n} > 1$  alors  $L_N$  ne correspond pas à un cycle puisque  $v_N > v_0$ .

Dans les autres cas, pour chaque étape où l'on est dans le "cas 1", il faut calculer  $V(n-1)$ . Si l'une des valeurs obtenues est inférieure à  $\text{maxSyr\_bl}$  alors  $L_N$  ne correspond pas à un autre cycle, sinon, il faut calculer  $v_N$  pour conclure.

On peut commencer par tester pour  $p$ , la plus petite valeur de  $1 < n < N$  pour laquelle on est dans le "cas 1", soit  $\frac{3^{m_p}}{2^p} < 1 < \frac{3^{m_{p-1}}}{2^{p-1}}$  et alors  $t_{p-1}$  est de "type 0".

En effet, si  $V(p-1) < \text{maxSyr\_bl}$ , on peut déjà conclure pour  $L_N$  puisque  $v_p < v_0$  et si c'est le cas pour toutes les listes de transitions  $L_N$ , alors, on peut conclure qu'il n'y a pas de cycle de longueur  $N$ , ce qui est le résultat qui nous intéresse pour minorer la longueur d'un éventuel autre cycle.

Pour  $b_1 > 1$ , on peut en avoir éventuellement trouvé plusieurs en testant la suite jusqu'à  $\text{maxSyr\_bl}$

On remarque que  $p$  prend uniquement des valeurs bien définies car  $m_n$  est incrémenté uniquement si  $t_{n-1}$  est de "type 1".

Donc, pour  $m_p$  donné, on a :

$$0 < \frac{3^{m_p}}{2^p} < 1 < \frac{3^{m_{p-1}}}{2^{p-1}}$$

$$\Leftrightarrow m_p \text{Ln}3 - p \text{Ln}2 < 0 < m_p \text{Ln}3 - (p-1) \text{Ln}2 \text{ car la fonction Ln est croissante}$$

$$\Leftrightarrow \lfloor m_p \times \frac{\text{Ln}3}{\text{Ln}2} \rfloor < m_p \times \frac{\text{Ln}3}{\text{Ln}2} < p < m_p \times \frac{\text{Ln}3}{\text{Ln}2} + 1 \text{ car } m_p > 0$$

$$\Leftrightarrow p = \lfloor m_p \times \frac{\text{Ln}3}{\text{Ln}2} \rfloor$$

$$\text{On doit donc calculer } V(p-1) = \frac{r_p}{1 - \frac{3^{m_p}}{2^p}}$$

Le dénominateur  $1 - \frac{3^m}{2^p}$  est le même pour toutes les listes de transitions qui ont la même valeur  $p$  et donc  $m_p$  d'après la relation précédente. Il est donc indépendant de l'ordre des  $p-2$  premières transitions,  $t_{p-1}$  étant forcément de "type 0".

Le nombre de ces listes est fini et même, ce nombre est égal aux nombres de façons de choisir  $m_p$  transitions parmi  $p-1$  car  $t_{p-1}$  est de "type 0".

Il existe donc une liste qui maximise  $r_p$  et si pour cette valeur,  $V(p-1) < \maxSyr\_bl$ , alors on peut affirmer qu'aucune de ces listes ne peut correspondre à un cycle puisque  $v_p < v_0$  et on peut les éliminer et considérer ensuite les listes qui ont pour première étape de "cas 1", la valeur suivante de  $p$  (et si le raisonnement précédent est faux **notamment dans le cas  $b_1 \neq 1$** , on peut prendre  $p+1$ ), c'est à dire pour une valeur de  $m$  valant  $m_p+1$ .

Si pour tout  $m_p$  tel que  $2 < p = \lceil m_p \times \frac{\text{Ln}3}{\text{Ln}2} \rceil \leq N$ , (ou même  $p \leq N$ ,  $p$  étant supérieur à la longueur minimale pour laquelle il n'y a pas de cycle trivial) on a cette propriété, que pour la valeur maximale de  $r_p$ ,  $V(p-1) < \maxSyr\_bl$ , alors, on peut affirmer qu'il n'y a pas de cycle de longueur inférieure ou égale à  $N$

Pour être sûr de passer par toutes les étapes  $p$  définies précédemment, il suffit de prioriser les transitions de "type 0", c'est à dire de faire toutes les transitions de "type 0" possibles avec la contrainte  $v_n \geq v_0$  avant d'ajouter une transition de "type 1".

De plus, dans ce cas,  $r_n$  est maximum pour une valeur de  $m_p$  fixée, par rapport à toutes les autres listes possibles, car les transitions de "type 0" sont mises le plus possible au début de la liste de transitions, en respectant les contraintes de la liste. La démonstration de cette propriété à été faite dans le paragraphe précédent IV-10.

Ainsi, on définit la liste de transitions qui est une frontière, que l'on note **JGL(N)** (pour "Just Greater List") de la manière suivante :

- JGL(1) = "1" ou  $t_0 = 1$  pour que  $v_1$  soit supérieur à  $v_0$  et  $r_1 = \frac{b_1}{2}$
- JGL(2) = "11" ou  $t_1 = 1$  et donc  $r_2 = \frac{5b_1}{4}$  car sinon on retrouve le cycle trivial avec  $p = \lceil \frac{\text{Ln}3}{\text{Ln}2} \rceil = 2$  et alors  $v_0 = b_1$
- Pour les étapes suivantes, on utilise cet algorithme :
  - $m = 2$ , le nombre de transitions de "type 1" de JGL(2)
  - Pour  $2 \leq n < N$  (on décale les indices pour avoir une action préventive)
    - si  $\frac{3^m}{2^{n+1}} > 1 \Leftrightarrow m \text{Ln}3 - (n+1) \text{Ln}2 > 0$ , alors on définit  $t_n$  de "type 0" et  $r_{n+1} = \frac{r_n}{2}$
    - si  $\frac{3^m}{2^{n+1}} < 1$ , on remarque que  $n+1$  est l'une des valeurs de  $p$  précédentes car  $n+1 = \lceil m \times \frac{\text{Ln}3}{\text{Ln}2} \rceil$

On teste si l'on peut avoir encore une transition de "type 0". Dans ce cas JGL( $n+1$ ), serait la liste qui maximise  $r_p$ , parmi toutes les listes qui ont comme première occurrence de  $\frac{3^m}{2^p} < 1$  pour  $p = n+1$ .

On calcule  $V_{\text{Max}}(n) = \frac{r_n}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{3^m}{2^{n+1}}}$  (On utilisera cette notation dans la suite du document

pour cette quantité) comme si  $t_n$  était de "type 0".  $V_{\text{Max}}(n) = \frac{r_{n+1}}{1 - \frac{3^m}{2^{n+1}}}$  avec  $t_n = 0$  car alors

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{2}$$

- Si  $V_{\text{Max}}(n) < \text{maxSyr\_bl}$  alors  $t_n$  de "type 0" est impossible pour respecter la contrainte  $v_{n+1} \geq v_0$  alors on définit  $t_n = 1, r_{n+1} = \frac{3r_n + 1}{2}$  et on incrémente  $m$ . Cela élimine toutes les listes pour cette valeur de  $p$  pour avoir un éventuel cycle. En définissant  $t_n = 1$ ,  $JGL(n+1)$  ne fait pas partie de cet ensemble de listes et est le début de la candidate idéale pour la valeur de  $p = \lceil m \times \frac{\text{Ln}3}{\text{Ln}2} \rceil$  suivante car  $m$  a été incrémentée.
- Si  $V_{\text{Max}}(n) > \text{maxSyr\_bl}$  alors il se peut qu'il y ait un cycle de longueur  $n+1$ , c'est la longueur minimale pour un éventuel cycle pour la suite de Syracuse réduite  $v$  et la longueur minimale d'un cycle pour la suite de Syracuse standard  $u$  est  $n+1+m$ . Cela ne signifie pas qu'il y en ait un. On sort de la boucle en indiquant la valeur de  $n+1$  pour  $v$ .

Avec l'algorithme précédent, on peut en déduire la longueur minimale d'un cycle.

Au départ, on devait tester les  $2^N$  listes de transitions... et finalement, il n'y en a plus qu'une seule à tester (magique !).

Pour  $N$  inférieur à cette valeur minimale de la longueur d'un cycle, la construction de  $JGL(N)$  peut déjà être plus simple en ayant comme propriété  $t_n = 1$  si et seulement si  $\frac{3^m}{2^{n+1}} < 1 \Leftrightarrow m \text{Ln}3 - (n+1)\text{Ln}2 < 0$ , mais cela reste une construction étape par étape. A l'aide des propriétés de  $JGL$ , on va voir que l'on peut l'obtenir bien plus rapidement par blocs, en étudiant ces motifs.

Cette liste frontière  $JGL(N)$  joue aussi un rôle important dans cette approche du théorème de Syracuse pour  $b_1 > 0$ , même au delà de la détermination de la longueur minimale d'un cycle, c'est pour cela que l'on peut l'étudier davantage.

Dans le cas où  $v_0 < 0$  (ou  $b_1 < 0$ ) :

On peut faire un raisonnement équivalent par symétrie puisque la liste de transitions  $JGL$  est la même, c'est celle qui maximise  $r_n$  pour toutes les listes de longueur  $n$ , cette fois avec  $v_n < v_0 < 0$ .

On reprend le paragraphe IV-5

On obtient alors l'algorithme suivant :

- $JGL(1) = "1"$  ou  $t_0 = 1$  pour que  $v_1$  soit inférieur à  $v_0$  et  $r_1 = \frac{b_1}{2}$ . Le cycle trivial avec  $v_0 = -b_1$  n'est pas intéressant ici, puisque  $v_0 < -\text{maxSyr\_bl}$ .
- $JGL(2) = "11"$  ou  $t_1 = 1$  et alors  $r_2 = \frac{5b_1}{4}$
- Pour les étapes suivantes, on utilise cet algorithme :
  - $m = 2$ , le nombre de transitions de "type 1" de  $JGL(2)$
  - Pour  $2 \leq n < N$  (on décale les indices pour avoir une action préventive)
    - si  $\frac{3^m}{2^{n+1}} < 1 \Leftrightarrow m \text{Ln}3 - (n+1)\text{Ln}2 < 0$ , c'est impossible alors on définit  $t_n$  de "type 1",  

$$r_{n+1} = \frac{3r_n + b_1}{2}, JGL(n+1) = JGL(n) + "1"$$
 et on incrémente  $m$
    - si  $\frac{3^m}{2^{n+1}} > 1$ , il existe toujours  $v_0$  vérifiant l'inégalité alors  $t_n = 0, r_{n+1} = \frac{r_n}{2}$  et  $JGL(n+1) = JGL(n) + "0"$

Seulement, comme  $r_{n+1} = \frac{r_n}{2}$  et  $v'_{n+1} < v_0$ , pour avoir un cycle de longueur  $n+1$ , il faut impérativement que  $r_{n+1} > 0$  soit suffisamment grand pour que  $v_{n+1} = v'_{n+1} + r_{n+1} \geq v_0$ , l'égalité signifierait un cycle.



Donc une condition nécessaire pour avoir un cycle, est  $V_{\text{Max}}(n) \leq v_0 < 0$ , l'inégalité précédente dans l'autre sens.

- Si  $V_{\text{Max}}(n) > -\text{maxSyr\_bl}$  alors ce serait un cycle trivial
- Si  $V_{\text{Max}}(n) < -\text{maxSyr\_bl}$  alors il se peut qu'il y ait un cycle de longueur  $n + 1$ , c'est la longueur minimale pour un éventuel cycle pour la suite de Syracuse réduite  $v$  et la longueur minimale d'un cycle pour la suite de Syracuse standard  $u$  est  $n + 1 + m$ . Cela ne signifie pas qu'il y en ait un. On sort de la boucle en indiquant la valeur de  $n + 1$  pour  $v$ .

Avec l'algorithme précédent, on peut en déduire la longueur minimale d'un cycle.

## 2. Motifs de JGL(n)

On montre ici que la liste JGL(n) présente des motifs répétitifs et cela nous permettra de la construire par blocs, plus rapidement que dans le calcul précédent.

On se place dans le cas où  $n < 10439860590$  donc la transition  $t_n$  est de "type 0" si et seulement si  $\frac{3^{m_n}}{2^n} \geq 2$ .

Pour  $b_1 > 1$  et  $v_0 > 0$ , la borne est  $n < 1538$

Pour  $b_1 > 1$  et  $v_0 < 0$ , la borne est  $n < 1053$

Ensuite (pour  $n \geq 10439860590$ ), effectivement, il pourrait y avoir une permutation de deux transitions successives assez rarement, ce qui fausserait bien évidemment JGL(n) mais qui n'aurait absolument aucun impact sur l'ordre de grandeur de  $r_n$  hormis pour les seules valeurs de  $n$  impactées (voir les remarques IV-10). Et puis, si l'on prouve par le calcul ou le raisonnement que la suite est vérifiée pour des valeurs plus grandes de  $v_0$  alors la borne sera encore bien plus grande... et si finalement, il n'y a pas d'autres cycles, alors la borne n'existe plus (infinie).

Le raisonnement précédent fait dans le cas de la suite de Syracuse standard est aussi valable pour la généralisation. Comme on va montrer qu'il n'y a pas d'autres cycles que les cycles triviaux, on peut faire comme si la borne n'existait pas même si c'est un peu prématuré.

Si  $\frac{m}{d}$  est proche de  $X$  par excès, alors  $\frac{3^m}{2^N}$  (avec  $N = m + d$ ) est proche de 1 par excès car

$\frac{3^m}{2^N} = e^{d(\ln 3 - \ln 2)(m/d - X)}$  alors on sent bien que les  $N$  transitions (appelé "motif") peuvent se répéter un certain

nombre de fois tant que la transition de "type 1" (pour  $0 < n < N$ ), la plus susceptible de se transformer en "type 0" n'a pas encore muté. Ce découpage me semble plus adapté que pour les approximations de  $X$  par défaut.

Nous pouvons définir des notations pour des opérations sur des listes :

- $L_1 + L_2$  : La concaténation de  $L_1$  et  $L_2$
- $p L_1$  :  $p$  fois la concaténation de  $L_1$ , soit  $p L_1 = L_1 + \dots + L_1$ ,  $p$  fois

D'ailleurs, on peut le constater pour JGL(k N) pour  $N = 1054$  et  $k = 200$  :

$L_1 = \text{JGL}(1054)$

$\text{JGL}(200 \times 1054) = \text{JGL}(210800) = 24 \times L_1 + L_2 + 23 \times L_1 + L_2 + 24 \times L_1 + L_2 + 23 \times L_1 + L_2 + 24 \times L_1 + L_2 + 23 \times L_1 + L_2 + 23 \times L_1 + L_2 + 24 \times L_1 + L_2 + 8 \times L_1 + L_3$

Description of the number of pattern  $L_1 = \text{JGL}(1054)$  :

number of times	number of occurrences	index of occurrences
24	4	0,50508,101016,176251
23	4	25781,76289,126797,151524
8	1	202032

Description of the elements  $L_1$ :

$L_i$	length	number of occurrences	value index of occurrences
$L_2$	485	8	JGL(484) + "0" 25296,50023,75804,100531,126312,151039,175766,201547
$L_3$	336	1	JGL(336) 210464

Et vous pouvez le tester (mieux pour  $N = 19, 84, 569$  ou  $1054$  que pour  $149$  par exemple) :

Valeur de  $k$  :  , Valeur de  $N$  :

Mais montrons le :

### Détermination du nombre de "motifs" pour une approximation par excès de $X$ :

Soit  $\frac{m}{d}$  (avec  $N = m + d$ ), une approximation par excès de  $X$  (voir §IV-9), alors  $F_N = \frac{3^m}{2^N}$  est le minimum pour  $0 < n \leq N$  de  $F_n = \frac{3^{m_n}}{2^n} > 1$ , puisque pour toutes les approximations de  $X$  par excès précédentes, cette valeur est plus grande et on ne tient pas compte des valeurs inférieures à 1 ( $F_{<1}$ ).

On appellera ici "motif", la liste de transitions JGL(N) (ou chaîne de caractères)

Rappel : On est dans le cas où la transition  $t_n$  est de "type 0" si est seulement si  $F_n = \frac{3^{m_n}}{2^n} \geq 2$  (ou

$\frac{F_n}{2} = \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} > 1$ ) car  $n < 10439860590$  (ou 1538, ou 1053) et  $t_n$  représente la position  $n + 1$  de la liste JGL.

La transition qui a le plus de chance de "muter" (ou changer de type, de passer d'une transition de "type 1" en transition de "type 0") est la transition de "type 1" qui est le plus proche de la condition d'avoir d'une transition de "type 0".

On classe donc par ordre décroissant les valeurs  $F_n = \frac{3^{m_n}}{2^n} < 2$  pour  $0 \leq n < N$ .

Il est immédiat que les premières valeurs correspondent aux valeurs de  $n + 1$  telles que  $\frac{m_n}{n - m_n + 1}$  est une approximation de  $X$  par défaut toujours pour les mêmes raisons.

On notera  $a$ , l'indice correspondant au maximum et  $b$ , l'indice correspondant à la deuxième valeur avec  $b < a$

On cherche donc  $q_1$ , la plus petite valeur entière, telle que :  $F_{q_1 N + a} = (F_N)^{q_1} F_a \geq 2$

Tant qu'une transition ne "mute" pas, c'est à dire que le motif JGL(N) se répète, on a toujours  $F_{p N + n} = (F_N)^p F_n$ , pour tout  $p \geq 0$  et tout  $0 \leq n < N$

$$\Leftrightarrow q_1 \ln(F_N) + \ln(F_a) \geq \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow q_1 \geq \frac{\ln(2) - \ln(F_a)}{\ln(F_N)}$$

$$\text{Donc, } q_1 = \lceil \frac{\ln(2) - \ln(F_a)}{\ln(F_N)} \rceil$$

On aura donc  $\text{JGL}(q_1 N + a) = q_1 \text{JGL}(N) + \text{JGL}(a - 1) + "0"$  et  $F_{q_1 N + a} = \frac{(F_N)^{q_1} F_a}{2}$

Par exemple, pour  $N = 1054$ , on a  $a = 485$  et  $q_1 = 24$ , ce qui donne  $\text{JGL}(24 \times 1054 + 485) = \text{JGL}(25781) = 24 \times \text{JGL}(1054) + \text{JGL}(484) + "0"$ . On remarquera que 25781 est l'approximation de  $X$  par excès suivant 1054, par abus de langage si l'on considère la somme du numérateur et du dénominateur.

On peut tester pour N =

Le motif JGL(N) se répètera ensuite  $q_2$  fois jusqu'à ce que l'on trouve  $0 \leq n < N$  telle que

$$\frac{(F_N)^{q_1} F_a}{2} (F_N)^{q_2} F_n > 2$$

Le minimum de  $q_2$  est atteint pour  $n = a$  mais il se pourrait que la même valeur  $q_2$  soit obtenue pour  $n = b$  (ou d'autres encore) et comme  $b < a$ , ce serait cette transition qui "muterait" en premier (pour  $n > a$ , cela n'a pas d'incidence car la transition  $a$  muterait tout de même avant).

Si  $\frac{F_a}{F_b} > F_N$  alors c'est impossible que  $b$  mute avant  $a$  (et a fortiori les autres) et alors ce serait forcément toujours la transition  $a$  qui mute, pour  $q_2$  mais aussi pour  $q_k$  pour tout  $k \geq 1$ .

On peut se contenter de le constater pour les valeurs de N qui nous intéressent (correspondant aux approximations de  $X$  par excès entre  $19 \leq N \leq 1082233$ ) avec le code de test précédent.

Par exemple, dans le test précédent, on voit que pour  $N = 1054$ ,  $\frac{F_a}{F_b} = \frac{F_{485}}{F_{401}} \approx 1.0020465696 F_{1054} > F_{1054} = F_N$ .

En fait, on peut démontrer que  $\frac{F_a}{F_b} > F_N$ , c'est ce que l'on fait tout de suite, avant de déterminer  $q_2$ , pour être parfaitement rigoureux.

Montrons que :  $\frac{F_a}{F_b} > F_N$

$$\Leftrightarrow \ln(F_a) - \ln(F_b) > \ln(F_N)$$

$$\Leftrightarrow d_a (\ln 3 - \ln 2) \left( \frac{m_a}{d_a} - x \right) - d_b (\ln 3 - \ln 2) \left( \frac{m_b}{d_b} - x \right) > d_N (\ln 3 - \ln 2) \left( \frac{m_N}{d_N} - x \right)$$

$$\Leftrightarrow d_a \left( \frac{m_a}{d_a} - x \right) - d_b \left( \frac{m_b}{d_b} - x \right) > d_N \left( \frac{m_N}{d_N} - x \right)$$

$$\Leftrightarrow X > \frac{m_a - m_b - m_N}{d_a - d_b - d_N} \text{ car } d_a - d_b - d_N < 0$$

$$\Leftrightarrow X > \frac{m_N + m_b - m_a}{d_N + d_b - d_a}$$

Par construction avec l'arbre de Stern-Brocot, à chaque étape, on conserve la meilleure approximation de  $X$  (par défaut ou par excès) donc la médiane est toujours une nouvelle borne de l'intervalle dans lequel est  $X$ .

Comme  $b < a < N$ , alors, par construction de la médiane, pour les étapes entre celle de  $b$  et celle de  $a$ , il n'y a que des approximations par excès, puis celle de  $a$  et ensuite encore que des approximations par excès jusqu'à celle de  $N$  qui est juste une valeur particulière.

A l'étape qui correspond à  $b$ , approximation par défaut, on a  $\frac{m_b}{d_b} < X < \frac{p}{q}$ ,  $\frac{p}{q}$  n'a pas d'importance.

Dans les  $k$  étapes suivantes avant celle de  $a$ , on a des approximations par excès donc  $\frac{m_b}{d_b} < X < \frac{k m_b + p}{k d_b + q}$

L'étape  $k+1$  correspond à  $a$  et  $= \frac{(k+1)m_b + p}{(k+1)d_b + q}$  et  $\frac{m_a}{d_a} < X < \frac{k m_b + p}{k d_b + q} = \frac{m_a - m_b}{d_a - d_b}$

Dans les  $l$  étapes suivantes jusqu'à celle de  $N$ , on a des approximations par excès donc

$$\frac{m_a}{d_a} < X < \frac{(l+1)m_a - m_b}{(l+1)d_a - d_b}$$

Et donc il existe  $l > 0$  telle que  $\frac{m_N}{d_N} = \frac{(l+1)m_a - m_b}{(l+1)d_a - d_b}$

Calculons maintenant,  $\frac{m_N + m_b - m_a}{d_N + d_b - d_a} = \frac{(l+1)m_a - m_b + m_b - m_a}{(l+1)d_a - d_b + d_b - d_a} = \frac{l m_a}{l d_a} = \frac{m_a}{d_a} < X$  car c'est une approximation par défaut de  $X$

Conclusion :  $\frac{F_a}{F_b} > F_N$

Reprenons la recherche de  $q_2$  sachant que l'on a prouvé que c'était toujours la transition  $a$  qui mute.

Ainsi, pour trouver  $q_2$ , on cherche la plus petite valeur entière telle que  $(F_N)^{q_1} \times \frac{F_a}{2} (F_N)^{q_2} F_a \geq 2$

$$\Leftrightarrow (F_N)^{q_1} (F_N)^{q_2} (F_a)^2 \geq 2^2$$

$$\Leftrightarrow q_1 \text{Ln}(F_N) + q_2 \text{Ln}(F_N) + 2 \text{Ln}(F_a) \geq 2 \text{Ln}2$$

$$\Leftrightarrow q_2 = \left\lceil \frac{2(\text{Ln}2 - \text{Ln}(F_a)) - q_1 \text{Ln}(F_N)}{\text{Ln}(F_N)} \right\rceil$$

On aura donc  $\text{JGL}((q_1 + q_2)N + 2a) = q_1 \text{JGL}(N) + \text{JGL}(a-1) + "0" + q_2 \text{JGL}(N) + \text{JGL}(a-1) + "0"$  et

$$F_{(q_1 + q_2)N + 2a} = \frac{(F_N)^{q_1 + q_2} (F_a)^2}{2^2}$$

Par exemple, pour  $N = 1054$ , on a  $a = 485$ ,  $q_1 = 24$  et  $q_2 = 23$ , ce qui donne  $\text{JGL}((24+23) \times 1054 + 2 \times 485) = \text{JGL}(50508) = 24 \times \text{JGL}(1054) + \text{JGL}(484) + "0" + 23 \times \text{JGL}(1054) + \text{JGL}(484) + "0"$ . On remarquera encore que 50508 est l'approximation de  $X$  par excès suivant 25781.

Montrons par récurrence que :

$$q_k = \left\lceil \frac{k(\text{Ln}2 - \text{Ln}(F_a)) - \sum_{i=1}^{k-1} q_i \text{Ln}(F_N)}{\text{Ln}(F_N)} \right\rceil \text{ et donc } \text{JGL}\left(\sum_{i=1}^k q_i N\right) + k a = \sum_{i=1}^k (q_i \times \text{JGL}(N) + \text{JGL}(a-1) + "0")$$

La formule est vérifiée pour  $k = 1$  et  $k = 2$

On suppose que c'est vrai pour  $k$  et on montre que c'est vrai pour  $k + 1$ .

Pour trouver  $q_{k+1}$ , on cherche la plus petite valeur entière telle que  $\sum_{i=1}^k (F_N)^{q_i} \times \frac{(F_a)^k}{2^k} (F_N)^{q_{k+1}} F_a \geq 2$  car

$$\frac{F_a}{F_b} > F_N$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^k q_i \text{Ln}(F_N) + k \text{Ln}(F_a) - k \text{Ln}2 + q_{k+1} \text{Ln}(F_N) + \text{Ln}(F_a) \geq \text{Ln}2$$

$$\Leftrightarrow q_{k+1} = \left\lceil \frac{(k+1)(\text{Ln}2 - \text{Ln}(F_a)) - \sum_{i=1}^k q_i \text{Ln}(F_N)}{\text{Ln}(F_N)} \right\rceil \text{ soit la propriété au rang } k+1, \text{ ce qui termine la démonstration.}$$

Conclusion : On peut obtenir  $\text{JGL}(n)$  par blocs, de manière bien plus rapide puisque l'on peut retrouver par le calcul les motifs qui avaient été observés au début de ce paragraphe.

On peut calculer  $\text{JGL}(n)$  par bloc avec  $N =$   et  $n =$

### 3. Calcul rapide de $R_0 = r_{N_0}$ pour $\text{JGL}(N_0)$

#### 1. Calcul de $r_N$ pour une concaténation de listes de transitions

Dans ce paragraphe, on utilise les notations suivantes :

- $N_0$  n'a rien à voir dans ce paragraphe avec la valeur correspondant à la vérification de la suite
- $L_k(N_k, m_k, d_k)$ , une liste de transitions de longueur  $N_k$  avec  $m_k$  transitions de "type 1" et  $d_k$  transitions de "type 0", donc  $N_k = m_k + d_k$
- $F_k = \frac{3^{m_k}}{2^{N_k}}$ , le facteur multiplicatif de  $L_k(N_k, m_k, d_k)$
- $R_k = r_{N_k}$ , le "résidu" à la fin de la liste de transitions  $L_k(N_k, m_k, d_k)$
- $f_k = \prod_{i=1}^k \frac{1}{F_i}$

Donc,  $v_{(N_k, L_k)} = F_k v_{(0, L_k)} + R_k$  caractérise  $L_k(N_k, m_k, d_k)$  qui définit les  $N_k$  bits de poids faibles de  $v_{(0, L_k)}$ , voir "Théorème 0" (paragraphe VI-2)

Nous pouvons définir des notations pour des opérations sur des listes :

- $L_1 + L_2$  : La concaténation de  $L_1$  et  $L_2$
- $p L_1$  :  $p$  fois la concaténation de  $L_1$ , soit  $p L_1 = L_1 + \dots + L_1$ ,  $p$  fois

a. Cas  $L_0 = L_1 + L_2$  :

On a:

- $N_0 = N_1 + N_2$ ,  $m_0 = m_1 + m_2$ ,  $d_0 = d_1 + d_2$
- $v_{(N_1, L_1)} = F_1 v_{(0, L_1)} + R_1$
- $v_{(N_2, L_2)} = F_2 v_{(0, L_2)} + R_2$

En remplaçant  $v_{(0, L_2)}$  par  $v_{(N_1, L_1)}$ , on obtient :

$v_{(N_0, L_0)} = F_2 (F_1 v_{(0, L_0)} + R_1) + R_2$ , les  $N_1$  bits de poids faible de  $v_{(0, L_0)}$  étant définis par  $L_1$  et les  $N_2$  bits suivants par  $L_2$  sachant que ce ne sont pas forcément (et même généralement) les mêmes que pour  $v_{(0, L_1)}$  mais le calcul de  $v_{(0, L_0)}$  et  $v_{(N_0, L_0)}$  nous importe peu, c'est la valeur de  $R_0$  qui nous intéresse ici.

$$v_{(N_0, L_0)} = F_0 v_{(0, L_0)} + R_0 \text{ avec } R_0 = F_2 R_1 + R_2 = \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \left( \frac{R_1}{F_1} + \frac{R_2}{F_1 F_2} \right) = \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} (f_1 R_1 + f_2 R_2) \text{ avec}$$

$$f_k = \prod_{i=1}^k \frac{1}{F_i}$$

b. Cas  $L_0 = L_1 + L_2 + L_3$  :

De la même manière, puisque  $v_{(N_3, L_3)} = F_3 v_{(0, L_3)} + R_3$ , en remplaçant  $v_{(0, L_3)}$  par la valeur de  $v_{(N_0, L_0)}$  obtenue précédemment pour  $L_0 = L_1 + L_2$ , on obtient :

$$v_{(N_0, L_0)} = F_0 v_{(0, L_0)} + R_0 \text{ avec } R_0 = F_2 F_3 R_1 + F_3 R_2 + R_3 =$$

$$\frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \left( \frac{R_1}{F_1} + \frac{R_2}{F_1 F_2} + \frac{R_3}{F_1 F_2 F_3} \right) = \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} (f_1 R_1 + f_2 R_2 + f_3 R_3) = \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \sum_{k=1}^3 f_k R_k$$

c. Cas général  $L_0 = \sum_{k=1}^n L_k$  :

Par récurrence immédiate, on a  $R_0 = \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \sum_{k=1}^n f_k R_k$

**d. Cas particulier  $L_0 = n L_1$  :**

$$\text{On a } R_0 = \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \sum_{k=1}^n f_k R_k = \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} R_1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{F_1}\right)^k = R_1 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \left(\frac{1}{F_1}\right)^k\right) = R_1 \sum_{k=1}^{n-1} \left((F_1)^n \times \frac{1}{(F_1)^k}\right)$$

car  $m_0 = n m_1$  et  $N_0 = n N_1$

$$R_0 = R_1 \sum_{k=1}^{n-1} (F_1)^{n-k} = R_1 \sum_{k=0}^{n-1} (F_1)^k \text{ en changeant les indices.}$$

On a alors une somme de termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison  $F_1$

$$R_0 = \frac{1 - (F_1)^n}{1 - F_1} R_1$$

De plus, si  $F_1 \approx 1$ , alors en posant  $u_1 = 1 - F_1$  alors  $(F_1)^n \approx 1 - n u_1$  et  $R_0 \approx n R_1$ , ce qui est une approximation linéaire.

**e. Cas général  $L_0 = \sum_{k=1}^n p_k L_k + L_{n+1}$  :**

$$R_0 = \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \left( \sum_{i=0}^{p_1-1} \frac{R_1}{(F_1)^{i+1}} + \frac{1}{(F_1)^{N_1}} \sum_{i=0}^{p_2-1} \frac{R_2}{(F_2)^{i+1}} + \dots \right) + R_{n+1}$$

$$R_0 = \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \left( \frac{R_1}{(F_1)^{p_1}} \sum_{i=0}^{p_1-1} (F_1)^i + \frac{R_2}{(F_1)^{p_1} (F_2)^{p_2}} \sum_{i=0}^{p_2-1} (F_2)^i + \dots \right) + R_{n+1}$$

ou plus mathématiquement :

$$R_0 = \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{\prod_{j=1}^k (F_j)^{p_j}} \sum_{i=0}^{p_k-1} (F_k)^i \right) + R_{n+1}$$

En remplaçant les sommes de termes en progression géométrique, on obtient :

$$R_0 = \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{\prod_{j=1}^k (F_j)^{p_j}} \times \frac{1 - (F_k)^{p_k}}{1 - F_k} \right) + R_{n+1}$$

De plus, si  $F_k \approx 1$ , pour tout  $1 \leq k \leq n$ , alors en posant  $u_k = 1 - F_k$  alors  $(F_k)^{p_k} \approx 1 - p_k u_k$ , et dans ce cas :

$$R_0 \approx \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{p_k R_k}{\prod_{j=1}^k (F_j)^{p_j}} \right) + R_{n+1}$$

Dans certains cas particuliers  $\prod_{j=1}^k (F_j)^{p_j} \approx 1$  pour tout  $1 \leq k \leq n$  et dans ce cas :

$$R_0 \approx \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \left( \sum_{k=1}^n p_k R_k \right) + R_{n+1}$$

**f. Test de calcul de  $R_0$  :**

Nombre de listes :

Longueur maximale de chaque liste :  (pour 19 ou 84,  $F_k$  est toujours proche de 1)

Listes identiques

Test

Voir/Masquer le code

## 2. Application pour JGL

D'après le paragraphe V-3-1-e, on a une formule générale pour calculer  $R_0$  dans le case où

$$L_0 = \sum_{k=1}^n p_k L_k + L_{n+1}$$

NB : La valeur  $N_0$  n'a rien à voir dans ce paragraphe avec la valeur correspondant à la vérification de la suite.

La formule est la suivante :

$$R_0 = \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{\prod_{j=1}^k (F_j)^{p_j}} \times \frac{1 - (F_k)^{p_k}}{1 - F_k} \right) + R_{n+1}$$

D'après le paragraphe précédent,  $JGL(N_0)$  est composé d'une alternance de listes de transitions identiques, la dernière liste étant un reste, soit :

- Pour  $1 < 2i + 1 \leq n$ ,  $L_{2i+1} = L_1$ , les listes d'indices impairs sont toutes  $L_1$
- Pour  $2 < 2i \leq n$ ,  $L_{2i} = L_2$ , les listes d'indices pairs sont toutes  $L_2$
- $N_2 < N_1$
- $N_{n+1} < N_1$ ,  $L_{n+1}$  est le début de  $L_1$
- $F_1 > 1$  et  $F_1 \approx 1$  car  $N_1$  correspond à une "approximation" de  $X$  par excès
- $F_2 < 1$  et  $F_2 \approx 1$  car  $N_2$  correspond à une "approximation" de  $X$  par défaut
- $(F_1)^{p_{2i+1}} (F_2)^{p_{2i+2}} \approx 1$ , compensation souvent avec  $|p_{2i+1} - p_1| \leq 1$  et  $p_{2i+2} = 1$
- $R_2 \approx \frac{N_2}{N_1} R_1$

Dans ces conditions, on a l'approximation que  $R_0 \approx$

$$\frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \times \frac{N_0 - N_{n+1}}{N_1} R_1 + R_{n+1} = \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \times \frac{N_0}{N_1} R_1 + R_{n+1} - \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \times \frac{N_{n+1}}{N_1} R_1, \text{ pour } N_0 \text{ assez grand, ce qui nous intéresse.}$$

De plus, la valeur maximale de  $r_n - \frac{3^{m_n}}{2^n} \times \frac{n}{N_1} R_1 \approx b_1$  pour  $0 \leq n < N_1$ .

Par exemple, cette différence vaut  $1.18 b_1$  pour  $N_1 = 1054$ , donc

$$R_0 \approx \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \times \frac{N_0}{N_1} R_1 \text{ qui est une approximation linéaire.}$$

Cela revient à dire que permuter quelques transitions dans  $JGL(N_0)$  n'a pas un impact important sur la valeur de  $R_0$

En considérant  $JGL(n)$ , pour tout  $n$  tel que  $t_n$  est de "type 1", on a  $1 < F_n < 2$  soit  $\frac{m_n}{d_{n+1}} < X < \frac{m_n}{d_n}$  ou

$m_n - X < d_n X < m_n$  donc  $m_n \approx d_n X$  pour  $n$  assez grand,

et donc  $n = m + d \approx (1 + X)d$

Et alors, après simplification par  $1 + X$ , on a la propriété suivante :

1. **Propriété V-3-2-1 : Pour JGL(N<sub>0</sub>), R<sub>0</sub> = r<sub>N<sub>0</sub></sub> ≈  $\frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \times \frac{N_0}{N_1} R_1 \approx \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \times \frac{d_0}{d_1} R_1$**

3. Si N<sub>0</sub> est tel que t<sub>N<sub>0</sub></sub> est de "type 1", toujours avec N<sub>0</sub> < 10439860590 ou 1538, ou 1053

Dans ce cas  $F_{N_0} = \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} < 2$  et  $R_1 < 0.45 d_1 b_1$  (0.4113 pour N<sub>1</sub> = 1054, par exemple)

et alors r<sub>n</sub> < (d<sub>n</sub> + 1) b<sub>1</sub> semble une majoration correcte.

C'est vérifié dans le code de test de IV-13 pour n < 10000, et ensuite 2×0.45 = 0.9 < 1

**Propriété V-3-3 : Pour tout n > 0, dans JGL(n), si t<sub>n</sub> est de "type 1", alors r<sub>n</sub> < (d<sub>n</sub> + 1) b<sub>1</sub>**

Les valeurs de R<sub>0</sub> sont données pour b<sub>1</sub> = 1, il faudrait les multiplier par b<sub>1</sub> dans le cas général

On peut calculer R<sub>0</sub> par bloc avec N =  et n =

4. Si N<sub>0</sub>+1 correspond à une "approximation" de X, ie  $\frac{m_0}{d_0+1}$  est une approximation de X

alors c'est un cas particulier du cas précédent,  $\frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \approx 2$  et  $R_{n+1} \approx 2 R_1$  et donc

$R_0 \approx 2 \times \frac{N_0}{N_1} R_1 \approx 2 \times \frac{d_0}{d_1} R_1 \approx 2 \times 0.411 d_0 b_1 = 0.822 d_0 b_1$ , approximation linéaire, ce qui permet d'avoir les

valeurs du paragraphe IV-13 et du paragraphe IV-14 instantanément alors qu'il fallait des heures, voire des journées de calculs, étape par étape. On retrouve des résultats semblables aux erreurs de précision près.

**Propriété V-3-4 : Pour tout n+1 correspondant à une "approximation" de X, dans JGL(n), r<sub>n</sub> ≈ 0.822103 d<sub>n</sub> b<sub>1</sub>**

Les valeurs de R<sub>0</sub> sont données pour b<sub>1</sub> = 1, il faudrait les multiplier par b<sub>1</sub> dans le cas général

On peut calculer R<sub>0</sub> par bloc pour les approximations par défaut : avec N =  et N<sub>0</sub>+1 =

On peut calculer R<sub>0</sub> par bloc pour les approximations par excès : avec N =  et N<sub>0</sub>+1 =

#### 4. Calcul de VMax(n) pour n+1 correspondant à une "approximation" de X

Pour rappel,  $V_{\text{Max}}(n) = \frac{2^n r_n}{2^n - 3^{m_n}}$  est la valeur maximale de v<sub>0</sub> vérifiant (In-1), qui est  $\left(1 - \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}}\right) v_0 \leq \frac{r_n}{2}$  avec

$\frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} < 1$  pour v<sub>0</sub> > 0 et avec  $\frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} > 1$  pour v<sub>0</sub> < 0

On se place dans le cas où  $\frac{m_n}{d_n+1}$  est une approximation de X.

Dans ce cas, VMax(n) représente la valeur maximale de v<sub>0</sub> pour laquelle il peut y avoir un cycle de longueur n+1.

Ainsi, si la suite est vérifiée jusqu'à cette valeur, alors la longueur minimale d'un cycle est égale à la "valeur suivante" de n+1

Alors, d'après la propriété IV-7-1,  $\frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} = \frac{3^{m_n}}{2^{N_n+d_n+1}} = e^{(d_n+1)(\text{Ln}3 - \text{Ln}2)(m_n/(d_n+1) - X)} = e^u$



Mais,  $\frac{m_n}{(d_n+1)} - X$  est de l'ordre de  $\frac{1}{(d_n+1)^2}$ , donc  $u \approx 0$ .

On peut donc utiliser l'approximation  $e^u \approx 1+u$  quand  $u \approx 0$ .

Et  $1 - \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} \approx 1 - (1+u) = -u$

De l'inégalité **(In-1)**, on a donc :

$-(d_n+1)(\text{Ln}3 - \text{Ln}2) \left( \frac{m_n}{d_n+1} - X \right) \text{VMax}(n) \approx \frac{r_n}{2} \approx \frac{1}{2} \times \frac{3^{m_n}}{2^n} \times \frac{d_n}{d_1} R_1$  avec  $R_1$  et  $d_1$  pour  $N_1$  correspondant à une "approximation" par excès de  $X$  d'après le paragraphe précédent.

Comme  $d_n+1 \approx d_n$  et  $\frac{3^{m_n}}{2^n} \approx 2$ , après simplification,

$$\blacksquare \text{ Propriété V-4-1 : } \text{VMax}(n) \approx \frac{R_1}{d_1} \times \frac{1}{\text{Ln}3 - \text{Ln}2} \times \frac{1}{X - \frac{m_n}{d_n+1}} \approx 1.0136 \times \frac{b_1}{X - \frac{m_n}{d_n+1}} \text{ pour } n+1,$$

"approximation" de  $X$

Remarque : On peut aussi prendre pour valeur de  $N_1$ , des valeurs qui "correspondent à des approximations" par défaut de  $X$  en changeant la dernière transition du motif JGL( $N_1$ ) pour le calcul de  $R_1$ . Par exemple, pour

$N_1 = 301994$ , on obtient des résultats intéressants car la précision  $x - \frac{190537}{111457} \approx 1.4274 \times 10^{-12}$  soit

$$\left( x - \frac{190537}{111457} \right) \times 111457^2 \approx 1.7732 \times 10^{-2}$$

On retrouve les résultats du IV-13 pour  $v_0 > 0$  et du IV-14 pour  $v_0 < 0$  aux erreurs de troncature près.

Ici, le calcul donne certainement des résultats plus justes pour les grandes valeurs de  $n$  et surtout instantanément.

Avec  $N_1 = 1054$ , on obtient notamment :

- $\text{VMax}(485) = 2^{16.14} b_1$
- $\text{VMax}(569) = -2^{16.3} b_1$  pour  $v_0 < 0$
- $\text{VMax}(301993) = 2^{39.37} b_1$
- $\text{VMax}(10439860590) = 2^{67.09} b_1$
- $\text{VMax}(114208327603) = 2^{71.41} b_1$ .

On posera :

- $N = n + 1$ , longueur d'un cycle pour  $v$
- $N_u = N + m_n$ , longueur d'un cycle pour  $u$
- $v_0 = \text{VMax}(n)$ , la valeur maximale pour laquelle il peut y avoir un cycle de cette longueur

Les valeurs de  $R_0$  sont données pour  $b_1 = 1$ , il faudrait les multiplier par  $b_1$  dans le cas général

Pour les valeurs de  $N$  correspondant aux "approximations de  $X$ " par défaut :

On peut calculer  $\text{VMax}(n)$  directement avec  $N_1 =$

Pour les valeurs de  $N$  correspondant aux "approximations de  $X$ " par excès :

On peut calculer  $\text{VMax}(n)$  directement avec  $N_1 =$

## 5. Démonstration du résultat expérimental du paragraphe IV-13 pour $v_0 > 0$ :

On pourrait se contenter de l'observation du paragraphe précédent IV-13 concernant les lignes du tableau de résultats, mais on cherche à le démontrer ici.

On considère l'inégalité, notée **(In-1)**,  $\left(1 - \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}}\right)v_0 \leq \frac{r_n}{2}$  avec  $\frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} < 1$

Le but est de montrer que  $\frac{m_n}{d_n+1}$  est une approximation par défaut de  $X$  (définie dans le paragraphe IV-8 avec l'arbre de Stern-Brocot) est une condition nécessaire et suffisante pour que la valeur maximale de  $v_0$ , notée  $V\text{Max}(n)$ , vérifiant l'inégalité **(In-1)** augmente.

Grâce aux motifs de  $JGL(n)$ , on a déjà pu calculer très rapidement  $r_n$  et aussi  $V\text{Max}(n)$ .

On rappelle que  $\frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} = \frac{3^{m_n}}{2^{m_n+d_n+1}} = e^{(d_n+1)(\text{Ln}3 - \text{Ln}2)(m_n/(d_n+1) - X)}$

Donc  $\frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} < 1 \Leftrightarrow \frac{m_n}{d_n+1} < X$  car  $e^u < 1 \Leftrightarrow u < 0$ , ce qui fait le lien entre les puissances et les fractions qui approximent  $X$ , ce que l'on utilisera souvent.

Et **(In-1)**  $\Leftrightarrow \left(1 - \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}}\right)v_0 \leq \frac{r_n}{2}$  avec  $\frac{m_n}{d_n+1} < X$

Si  $\text{appX}(k) = \frac{mX_k}{dX_k}$  avec  $\frac{3^{mX_k}}{2^{NX_k}} < 1$  et  $NX_k = mX_k + dX_k$  est la  $k^{\text{ième}}$  approximation de  $X$  par défaut, définie en IV-8, alors montrons :

- **L'existence de l'étape  $n$  dans la construction de  $JGL(n)$  telle que  $\frac{m_n}{d_n+1} = \text{appX}(k)$**

Comme  $n = m_n + d_n$  augmente de 1 en 1 (incrémentations) dans la construction de  $JGL(n)$ , alors le nombre d'étapes de "type 1", qui représente le numérateur de  $\frac{m_n}{d_n}$  prend aussi toutes les valeurs.

Alors, il existe une étape avec  $N_{n1} = m_{n1} + d_{n1}$  tel que  $m_{n1} = mX_k$  et pour tout  $n < N_{n1}$ ,  $m_n < m_{n1}$ .

Ensuite, dans la construction le nombre d'étapes de "type 1" ne varie pas tant qu'une transition de "type 0" est possible, donc on a toutes les étapes  $n = m_{n1} + d_n$  avec  $d_n = d_{n1} + i$  et  $0 \leq i \leq p$  où  $p$  est la valeur

maximale telle que  $\frac{3^{m_1}}{2^{m_{n1}+d_{n1}+i+1}} \geq 1$  donc pour  $i = p$ , on a encore  $\frac{3^{m_1}}{2^{m_{n1}+d_{n1}+p+1}} \geq 1$  (et donc

$\frac{m_1}{d_{n1}+p+1} > X$ ,  $X$  n'étant pas rationnel), donc la transition de "type 0" est possible et donc l'étape  $n$  avec

$m_n = m_{n1}$  et  $d_n = d_{n1} + p + 1$  fait partie de la construction de  $JGL$ .

Or  $\frac{3^{m_1}}{2^{d_{n1}+p+2}} = \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} < 1$ , par définition de  $p$ , et donc  $\frac{m_1}{d_{n1}+p+2} < X$ .

Donc,  $\frac{m_1}{d_{n1}+p+2} < X < \frac{m_1}{d_{n1}+p+1}$  et alors par identification, forcément  $d_{n1}+p+2 = dX_k$  et on a bien

l'étape  $n = m_n + d_n$  avec  $m_n = m_{n1} = mX_k$  et  $d_n = d_{n1} + p + 1$  qui est une étape de  $JGL$ , telle que

$\frac{m_n}{d_n+1} = \text{appX}(k)$

- **Condition suffisante** :  $V\text{Max}(mX_k + (dX_k - 1)) > V\text{Max}(n)$  pour tout  $n < mX_k + dX_k - 1$

- $r_{mX_k+dX_k-1} > r_n$  pour tout  $n < mX_k+dX_k-1$  car d'après la propriété V-3-2-1 ( $R_0 = r_{N_0} \approx \frac{3^{m_0}}{2^{N_0}} \times \frac{d_0}{d_1} R_1$ ),  $r_n$  est proportionnel à  $d_n$  et  $\frac{3^{m_n}}{2^n}$ .

Or,  $dX_k \geq d_n$  pour tout  $0 < n < NX_k$  car c'est la dernière étape

et  $\frac{3^{mX_k}}{2^{NX_k}} \geq \frac{3^{m_n}}{2^n}$  pour tout  $0 < n < NX_k$  car  $X - \frac{mX_k}{dX_k} < X - \frac{m_n}{d_n}$  puisque c'est la meilleure approximation par défaut de l'arbre de Stern-Brocot

- $X - \frac{mX_k}{mX_k+dX_k} < X - \frac{m_n}{n-m_n+1}$  pour tout  $n < mX_k+dX_k-1$ , par définition de  $\text{appX}(k)$   
donc  $1 - \frac{3^{mX_k}}{2^{mX_k+dX_k}} < 1 - \frac{3^{m_n}}{2^{n-m_n+1}}$  pour tout  $n < mX_k+dX_k-1$

La conclusion est donc immédiate, le numérateur étant le plus grand jamais atteint et le dénominateur le plus petit jamais atteint.

### ▪ Condition nécessaire

On montre ici que  $\text{VMax}(n)$  est uniquement lié à la quantité  $X - \frac{m_n}{d_n+1} > 0$  et donc une condition nécessaire

pour que  $\text{VMax}(n)$  augmente, est que les  $\frac{m_n}{d_n+1}$  correspondent aux approximations par défaut de  $X$  ou  $\text{appX}(k)$  pour  $k \geq 0$

Soit, pour tout  $NX_k < n < NX_{k+1}$ , on a  $\text{VMax}(n) < \text{VMax}(NX_k-1) < \text{VMax}(NX_{k+1}-1)$

On admet que ce résultat a été vérifié par le calcul pour tout  $n < 485$  (voire 10000), afin de pouvoir utiliser

l'équivalence de la propriété V-3-2-1, soit : Pour  $\text{JGL}(n)$ ,  $r_n \approx 0.411 \times \frac{3^{m_n}}{2^n} d_n$

$$(\mathbf{In-1}) \Leftrightarrow \left(1 - \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}}\right) v_0 \leq \frac{r_n}{2} \text{ avec } \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \text{VMax}(n) = \frac{r_n}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}}} = 0.411 \times \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} d_n \times \frac{1}{1 - \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}}}, \text{ ou plus exactement, la partie entière de}$$

cette expression.

Mais,  $\frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} = \frac{3^{m_n}}{2^{m_n+d_n+1}} = e^{(d_n+1)(\text{Ln}3 - \text{Ln}2)(m_n/(d_n+1) - X)} = e^{-u}$  avec

$$u = (d_n+1)(\text{Ln}3 - \text{Ln}2) \left(X - \frac{m_n}{d_n+1}\right)$$

- Cas où  $\frac{m_n}{d_n+1} - X$  est assez proche de 0 pour utiliser  $e^{-u} \approx 1 - u$

$$\text{VMax}(n) = \frac{0.411 \times \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} d_n}{(d_n+1)(\text{Ln}3 - \text{Ln}2) \left(X - \frac{m_n}{d_n+1}\right)} \times \frac{0.411}{\text{Ln}3 - \text{Ln}2} \times \frac{d_n}{d_n+1} \times \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} \times \frac{1}{X - \frac{m_n}{d_n+1}}$$

Comme  $d_n+1 \approx d_n$

$$\text{VMax}(n) = 1.0136 \times \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} \times \frac{1}{X - \frac{m_n}{d_n+1}}$$

On remarque que  $\frac{3^{mX_{k+1}}}{2^{NX_{k+1}}} > \frac{3^{mX_k}}{2^{NX_k}}$  et  $X - \frac{mX_{k+1}}{dX_{k+1}} < X - \frac{mX_k}{dX_k}$  donc

$$V\text{Max}(NX_{k+1}-1) > V\text{Max}(NX_k-1)$$

Pour tout  $NX_k < n < NX_{k+1}$ ,  $X - \frac{m_n}{d_n+1} \geq X - \frac{mX_k}{dX_k}$ , par définition

- Si  $X - \frac{m_n}{d_n+1} > X - \frac{mX_k}{dX_k}$  alors  $\frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} < \frac{3^{mX_k}}{2^{NX_k}}$  aussi et on a bien  $V\text{Max}(n) < V\text{Max}(NX_k-1)$
- Si  $X - \frac{m_n}{d_n+1} = X - \frac{mX_k}{dX_k}$  alors  $n+1$  est un multiple de  $NX_k$ , c'est-à-dire qu'il existe  $j \in \mathbb{N}$ , tel

que  $n+1 = jNX_k$ ,  $m_n = j mX_k$  et  $d_n+1 = j dX_k$  et donc  $\frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} = \left(\frac{3^{mX_k}}{2^{dX_k}}\right)^j$ , mais  $\frac{3^{mX_k}}{2^{dX_k}} < 1$  donc  $\frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} < \frac{3^{mX_k}}{2^{dX_k}}$  et finalement  $V\text{Max}(n) < V\text{Max}(NX_k-1)$ , même dans le meilleur cas où il y a  $j$  répétitions du motif JGL( $NX_k$ ) à quelques permutations de transitions, ce qui n'a pas beaucoup d'incidence sur le calcul de  $r_n$

- Cas où  $\frac{m_n}{d_n+1} - X$  n'est pas assez proche de 0 pour utiliser  $e^{-u} \approx 1-u$

Alors  $u \geq b$  avec  $b = 0.1$ , par exemple

car  $\frac{e^{-u} - (1-b)}{e^{-b}} < \frac{e^{-b} - (1-b)}{e^{-b}} \approx 5.3 \times 10^{-3}$  est déjà une précision relative suffisante pour déjà appliquer l'équivalence.

$$u \geq b \Leftrightarrow -u \leq b \Leftrightarrow e^{-u} \leq e^{-b} \Leftrightarrow 1 - e^{-u} \geq 1 - e^{-b} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-u}} \leq \frac{1}{1 - e^{-b}}$$

$$r_n \approx 0.411 \times \frac{3^{m_n}}{2^n} d_n \leq 0.411 \times 2 d_n \text{ car } \frac{3^{m_n}}{2^{n+1}} < 1$$

$$V\text{Max}(n) = \frac{r_n}{2} \times \frac{1}{1 - e^{-u}} \leq 0.411 d_n \times \frac{1}{1 - e^{-u}} \leq \frac{0.411}{1 - e^{-b}} d_n = K d_n, \text{ avec } K = \frac{0.411}{1 - e^{-b}} \text{ donc } V\text{Max}(n)$$

est de l'ordre de  $d_n$

Pour  $b = 0.1$ ,  $K \approx 4.31$

Mais pour  $NX_k < 8573543875303$ ,  $X - \frac{mX_k}{dX_k} < \frac{6}{dX_k^2}$  (voir IV-8, maximum atteint pour = 12079),

donc  $X - \frac{mX_k}{dX_k}$  est de l'ordre de  $\frac{1}{dX_k^2}$  dans (au moins) l'intervalle qui nous intéresse.

Et  $V\text{Max}(NX_k-1) \approx 1.0136 \times \frac{1}{X - \frac{mX_k}{dX_k}}$  d'après la propriété V-4-1

Donc  $V\text{Max}(NX_k-1) > \frac{1.0136}{6} dX_k^2$  est de l'ordre de  $dX_k^2$  (pour  $NX_k < 8573543875303$ , ce qui nous intéresse ici)

$V\text{Max}(n) < V\text{Max}(NX_k-1) \Leftrightarrow K d_n < \frac{1.0136}{6} dX_k^2 \Leftrightarrow d_n < 0.0392 dX_k^2$ , ce qui est toujours vrai car  $d_n < dX_{k+1}$  et  $dX_{k+1}$  vérifie cette inégalité pour  $dX_k \geq 55$  et c'est vrai avec les vraies valeurs (sans majoration par 6) pour  $dX_k \geq 10$  mais de toute façon, on suppose que la condition nécessaire a été vérifiée pour  $n < 485$ )

Conclusion : La condition nécessaire est bien démontrée

Finalement, les résultats expérimentaux ont été démontrés, on a pu aussi trouver une méthode instantanée pour trouver JGL( $n$ ) et calculer  $V\text{Max}(n)$ , ce qui prenait un temps considérable (voir le programme du paragraphe V-4).

## 6. Démonstration du résultat expérimental du paragraphe IV-14 pour $v_0 < 0$ :

On pourrait se contenter de l'observation du paragraphe précédent IV-14 concernant les lignes du tableau de résultats, mais on cherche à le démontrer ici.

Le but est de montrer que  $\frac{m_n}{d_n+1}$  est une approximation par excès de  $X$  (définie dans le paragraphe IV-9 avec l'arbre de Stern-Brocot), ainsi que certaines fractions réductibles représentant une approximation par excès, est une condition nécessaire et suffisante pour que la valeur maximale de  $v_0$ , notée  $V_{\text{Max}}(n)$ , vérifiant l'inégalité augmente.

On pourrait faire une démonstration analogue à celle du paragraphe précédent.

On se concentrera sur l'explication de l'apparition de fractions réductibles égales aux approximations par excès.

En effet, l'arbre de Stern-Brocot donne uniquement les fractions irréductibles !

On a vu que JGL présentait des "motifs" de longueurs égales à  $N_1$  ("approximation de  $X$  par excès") qui se répétaient un certain nombre de fois, noté  $p$ .

Pour  $1 < k \leq p$  et  $N_0 = k N_1$ , on a  $\frac{V_{\text{Max}}(N_0-1)}{V_{\text{Max}}(N_1-1)} = \frac{R_0}{R_1}$  puisque  $X - \frac{m_0}{d_0} = X - \frac{m_1}{d_1}$  étant donné que les fractions sont égales.

D'après la formule du paragraphe V-3-1-d, on a  $R_0 = \frac{1-(F_1)^k}{1-F_1} R_1$  pour  $1 < k \leq p$

Mais comme  $F_1 > 1$  car c'est une approximation par excès,

alors, pour  $1 < k \leq p$ ,  $(F_1)^k > F_1 \Leftrightarrow 1-(F_1)^k < 1-F_1 \Leftrightarrow \frac{1-(F_1)^k}{1-F_1} > 1$

et finalement  $\frac{V_{\text{Max}}(N_0-1)}{V_{\text{Max}}(N_1-1)} > 1$ , donc les  $p$  lignes devraient apparaître dans le tableau.

Si elles n'apparaissent pas c'est lié aux erreurs de troncatures dans les calculs. On peut faire varier leur apparition en jouant avec la précision des calculs.

De toute façon, la valeur de  $V_{\text{Max}}(N_0-1) \approx V_{\text{Max}}(N_1-1)$  donc on peut les éliminer.

De plus, s'il y avait un cycle de longueur  $N_1$  alors les longueurs multiples  $k N_1$  représenteraient un cycle non minimal.

Seules sont intéressantes les fractions irréductibles pour des augmentations significatives de  $V_{\text{Max}}(n)$

## VI. Recherche de cycles :

On a déjà démontré l'importance de la liste JGL(N) dans les parties précédentes pour déterminer la longueur minimale d'un cycle non trivial.

On rappellera les résultats et on établira une fonction simple pour déterminer la longueur minimale d'un cycle pour  $v$  en fonction de la vérification de la suite.

Ensuite, on va s'intéresser à la localisation des éléments d'un éventuel cycle de longueur  $N$  et on obtiendra des résultats nouveaux et très intéressants.

On se limite à l'étude des cycles pour lesquels  $\text{pgcd}(b_1, v_0) = 1$

En effet, si l'on a un cycle avec  $(b_1, v_0)$ , alors pour tout entier impair  $k$  non nul, on a aussi un cycle avec  $(kb_1, kv_0)$

Pour  $|b_1| < 1024$ , les résultats sont valables pour  $N \geq 27$ . Cela serait facilement généralisable pour des valeurs plus grandes de  $b_1$ , la valeur minimale de  $N$  augmentant lentement.

On montrera que les éléments d'un cycle non trivial de longueur  $N$  pour  $v$  sont dans l'intervalle  $[2^{0.04N}, 2^N]$  pour  $N \geq 1000$  avec  $|b_1| < 1024$ , en utilisant :

- Le "Théorème 0" pour montrer que les éléments d'un éventuel cycle sont inférieurs à  $2^N$  (pour  $v_0 > 0$  et, par symétrie pour  $v_0 < 0$ , supérieurs à  $-2^N$  pour  $N \geq 27$  avec  $|b_1| < 1024$ ).
- Une méthode statistique très robuste (coefficient de corrélation linéaire supérieur à 0.999) pour montrer que l'élément minimal est supérieur à  $2^{0.04N}$  (pour  $v_0 > 0$  et, par symétrie pour  $v_0 < 0$ , l'élément maximal est inférieur à  $-2^{0.04N}$ ) pour  $N > 1000$ .

On pourra alors conclure sur l'existence éventuelle d'autres cycles.

Remarque : D'après la démonstration du "Théorème 1", il est facile de montrer que les nombres révolutionnaires (qui sont les solutions au "Théorème 1", à partir desquels on obtient quasiment un cycle), sont les solutions minimales ou non des listes de transitions  $L(N, m, d)$  pour lesquelles  $\frac{m}{d}$  est une approximation de  $X$  par défaut ou par excès.

## 1. Synthèse sur la longueur minimale d'un cycle non trivial :

### 1. Récapitulatif des résultats :

On a vu comment le test de la liste de transitions  $JGL(n)$  permettait de connaître la longueur minimale  $N$  d'un éventuel cycle pour la suite de Syracuse réduite  $v$ .

Dans la partie IV, on a trouvé cette longueur, simplement en faisant des calculs fastidieux à l'aide d'un ordinateur

Dans la partie V, on a démontré les résultats expérimentaux en étudiant plus précisément quelques propriétés de  $JGL(n)$  et cela a permis d'obtenir le résultat très facilement.

Il s'avère que cette longueur minimale pour un éventuel cycle dépend de la valeur maximale  $v_0$  (minimale pour  $v_0 < 0$ ) pour laquelle la suite a été testée.

La limite de la longueur est augmentée de manière certaine uniquement si la vérification a été faite jusqu'à la valeur  $v_0$  pour  $N$  correspondant aux "approximations" par défaut de  $X$  (par excès pour  $v_0 < 0$ ), plus

précisément quand  $N = m + d$  et  $\frac{m}{d}$  est une approximation de  $X$ .

Avec les tests pour la suite de Syracuse standard, on a retrouvé le résultat de Shalom Eliahou, à savoir que la longueur minimale d'un cycle est  $N = 114208327604$  pour  $v$ , ce qui représente une longueur de 186265759595 pour  $u$ .

Compte tenu de la recherche de cycles triviaux pour  $|v_0| < 2^{N_0+B_1}$ , avec  $N_0 = 17$  dans le cas  $|b_1| < 1024$  (voir le paragraphe III), on est assuré :

- Pour  $v_0 > 0$ , la longueur minimale d'un cycle est 1539
- Pour  $v_0 < 0$  (ou  $b_1 < 0$ ), la longueur minimale d'un cycle est 1054

Les valeurs maximales de  $v_0$  dans les tableaux suivants sont données pour  $b_1 = 1$  et sont à multiplier par  $b_1$  si  $b_1 \neq 1$ .

On trouve le tableau non exhaustif ci-dessous ( $N_u = N + m$  est la longueur minimale pour la suite de Syracuse  $u$ ) :

Pour  $v_0 > 0$

N	$N_u$	max for $v_0$
27	44	$2^{6.6994}$
46	75	$2^{8.1032}$
65	106	$2^{9.7436}$
149	243	$2^{11.2271}$
233	380	$2^{12.2368}$
317	517	$2^{13.1703}$
401	654	$2^{14.253}$
485	791	$2^{16.1354}$
1539	2510	$2^{17.8632}$
2593	4229	$2^{18.6816}$
3647	5948	$2^{19.2426}$
4701	7667	$2^{19.6813}$
5755	9386	$2^{20.0495}$
6809	11105	$2^{20.3727}$
7863	12824	$2^{20.6657}$
8917	14543	$2^{20.9379}$
9971	16262	$2^{21.1959}$
11025	17981	$2^{21.4446}$
12079	19700	$2^{21.6882}$
13133	21419	$2^{21.93}$
14187	23138	$2^{22.1737}$
10439860591	17026679261	$2^{67.0843}$
114208327604	186265759595	$2^{71.4131}$
6048967074079039	9865440379489587	$2^{100.3901}$
4055842426088317893144813378287	6614794088504882375744109248036	$2^{200.3751}$

Pour  $v_0 < 0$

N	$N_u$	max for $v_0$
3	5	$-2^{1.5850}$
11	18	$-2^{4.6439}$
19	31	$-2^{7.7279}$
84	137	$-2^{12.5758}$
569	928	$-2^{16.3061}$
1054	1719	$-2^{21.8053}$
25781	42047	$-2^{27.1956}$
50508	82375	$-2^{29.9750}$
766512153894657	1250127478260940	$-2^{99.7182}$

## 2. Majoration de $f(N)$ avec la valeur maximale de $v_0 \approx 2^{f(N)+B_1}$ :

On pose  $f(N)$ , l'exposant de la valeur maximale de  $v_0 = 2^{f(N)+B_1}$  en fonction de  $N$ .

Les maximum locaux de  $f(N)$  sont obtenus pour les valeurs de  $N$  correspondant aux "approximations" par défaut de  $X$  (par excès pour  $v_0 < 0$ ), donc on peut prendre ces points pour majorer  $f(N)$

Mais, dans ces cas d'approximations par défaut de  $X$ , on peut appliquer la propriété V-4-1 où l'on a :

$$\max(v_0) \approx 1.0136 \times \frac{b_1}{X - \frac{m}{d}} = \frac{1.0136 b_1}{|diff|}$$

Or, sans utiliser le théorème de meilleure approximation pour les fractions continues qui majore l'écart absolu, on peut dire que  $C < d^2 |diff|$  avec  $C > 10^{-3}$  certainement, cette minoration pouvant être modifiée sans changer le raisonnement.

On a aussi  $d \approx \frac{N}{1+X}$  pour  $N$  assez grand.

$$\text{Donc } \max(v_0) < \frac{1.0136 d^2 b_1}{C} \approx \frac{1.0136 N^2 b_1}{(1+X)^2 C}$$

Et donc  $f(N) < \frac{2 \text{Ln}(N)}{\text{Ln}2} + \frac{\text{Ln}(1.0136) - 2 \text{Ln}(1+X) - \text{Ln}(C)}{\text{Ln}2} = \frac{2}{\text{Ln}2} \text{Ln}(N) + 4$  avec  $C = 8.8198 \times 10^{-3}$ , un changement de la valeur de  $C$  ne change rien.

Dans les tests :

- c'est le code du paragraphe V-4-1 avec la visualisation de colonnes additionnelles dans les résultats
- Les valeurs maximales de  $v_0$  dans les tableaux suivants sont données pour  $b_1 = 1$  et sont à multiplier par  $b_1$  si  $b_1 \neq 1$ .
- $N_1 = 1054$
- $exp2$  tel que  $v_0 \approx 2^{exp2}$
- $f(N) = \frac{2}{\text{Ln}2} \text{Ln}(N) + 4$
- $diff\_exp2$ , la différence entre deux valeurs de  $exp2$  consécutives

Pour  $v_0 > 0$  : Test de l'approximation de  $f(N)$  :

Pour  $v_0 < 0$  : Test de l'approximation de  $f(N)$  :

## 3. Majoration de la différence entre deux valeurs consécutives de $exp2$ pour $N$ une "approximation de $X$ "

On remarque, dans le test précédent concernant les approximations par défaut, mais aussi dans le test précédent concernant les approximations par excès, que la différence entre 2 valeurs consécutives de  $exp2$  est toujours inférieure à 10.

Pour les approximations par défaut : Cette différence est même inférieure à 3 pour  $N \leq 125743$

Pour les approximations par excès : Cette différence est même inférieure à 6 pour  $N \leq 83130157078217$

Cela signifie qu'il ne faut que quelques bits supplémentaires à la valeurs maximale de  $v_0$  (jusqu'à laquelle la suite est vérifiée), pour changer de palier et avoir une autre valeur de longueur minimale pour un cycle non trivial.

## 4. Minoration de la longueur minimale $N$ d'un cycle si la suite à été vérifiée jusqu'à $v_0 = 2^{n+B_1}$

Réciproquement, si la suite de Syracuse a été vérifiée pour  $v_0 = 2^{n+B_1}$ , alors la longueur minimale d'un



éventuel cycle sera exponentielle.

Et on résout  $n < f(N)$

$$\Leftrightarrow n < \frac{2}{\ln 2} \ln(N) + 4$$

$$\Leftrightarrow \ln(N) > \frac{n-4}{2} \ln 2 = \frac{n}{2} \ln 2 - 2 \ln 2$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{2^{n/2}}{4}$$

Pour  $n = 68$ , on trouve  $N = \frac{17179869184}{4} = 4294967296 < 10439860591$ , ce qui est cohérent avec le tableau précédent, la minoration de  $C$  est large.

Cette minoration assez large est obtenue dans le cas général et pourrait être plus fine pour des valeurs spécifiques de  $n$

**Propriété VI-1-4 :** Si la suite de Syracuse est vérifiée jusqu'à  $v_0 = 2^{n+B_1}$  (avec  $n \geq N_0$ ), alors la longueur minimale d'un cycle (non trivial) est  $N > \frac{2^{n/2}}{4}$ , pour la suite de Syracuse réduite

## 2. "Théorème 0"

**Enoncé :**

Pour toute liste de transitions  $L$  (de longueur  $N$  quelconque), il existe une infinité de racines (valeurs de  $v_0$ ) dont les premières transitions par la suite de Syracuse réduite  $v$  sont celles de la liste  $L$  donnée.

Il existe une et une seule racine  $s_0$  dans l'intervalle  $[0, 2^N[$  et les autres racines sont de la forme  $V_0 = s_0 + n \times 2^N$  avec  $n > 0$

**I) Notations et définitions :**

Tout d'abord, définissons quelques éléments et précisons quelques notations

**a) Trajectoire de longueur  $N = m + d$  pour  $v$  :**

Une trajectoire de longueur  $N$  est une liste de transitions de "type 0" ou de "type 1" donc un mot composé de 0 et de 1

On posera  $d$ , le nombre de transitions "de type 0" et  $m$  le nombre de transitions de "type 1" et  $N = m + d$ :

Par exemple :

Avec  $v$ , on a  $v_0 = 7 = 1 \Rightarrow 11 = 1 \Rightarrow 17 = 1 \Rightarrow 26 = 0 \Rightarrow 13$ , la trajectoire est "1110"

Au lieu de considérer une trajectoire comme un mot sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ , on peut le voir comme un nombre au format binaire, écrit avec les poids faibles à gauche.

Par exemple "1110" se traduit en  $1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 = 7$ .

**Définition :** Une trajectoire pour  $v$  est nommée  $T_N = \sum_{i=0}^{N-1} t_i \times 2^i$  où  $t_i$  est le type de la transition  $i$ .

C'est un nombre strictement inférieur à  $2^N$

**b) Extension de  $v$  pour  $v_0 = 0$**

Cette extension, pour homogénéiser, permet simplement d'avoir  $v_0 = 0$  comme solution de  $T_N = 0$  pour toute valeur de  $N > 0$  à la place de  $2^N$  et donc de simplifier le raisonnement.

Il ne s'agit pas d'avoir un autre cycle trivial de longueur 1 à partir de 0.

## II) Démonstration :

Une autre démonstration, différente de celle-ci, rédigée avec un autre esprit est aussi disponible.

### 1) Montrons qu'il existe une et une seule solution $v_0$ dans $[0, 2^N[$ telle que $v_0$ suive une trajectoire $T_N$ donnée.

C'est à dire qu'il existe une bijection entre les trajectoires et les solutions qui les suivent dans l'ensemble  $[0, 2^N[$ .  
Idées principales de la démonstration :

- la parité d'un nombre est une propriété locale qui ne dépend que du bit de poids faible (bit 0) et donc  $2^n$  est pair pour  $n > 0$ .
- les transitions  $t_i$  pour  $i < n$  ne dépendent que des  $(n-1)$  bits de poids faibles de  $v_0$  ou que la transition  $t_n$  dépend de la résultante des transitions précédentes sur les  $n-1$  bits de poids faibles de  $v_0$  et du bit  $n$  de  $v_0$ , c'est l'idée nouvelle au sujet de la suite de Syracuse

Montrons ce résultat par récurrence.

a) Vérifions que la propriété est vraie pour  $N = 1$  :

Pour  $N = 1$ , les deux seules trajectoires de longueur 1 sont "0" ou "1" pour  $t_0$  de "type 0" ou de "type 1"

Grâce à l'extension de  $v$  pour  $v_0 = 0$ ,  $v_0$  réalise "0" (dans ce cas particulier, on aurait pu prendre  $v_0 = 2^N = 2$  et définir une bijection entre  $[0; 2^{N-1}]$  et  $[1; 2^N]$ )

Et  $v_0 = 1 < 2^1$  réalise "1" car 1 est impair.

Donc la propriété est vraie pour  $N = 1$

b) Montrons que si la propriété est vraie pour  $N$ , alors elle est vraie pour  $N+1$

On considère  $T_{N+1}$ , une trajectoire de longueur  $N+1$  ou liste de transitions de la suite  $v$  à  $N+1$  éléments.

Une solution qui suit  $T_{N+1}$  doit impérativement suivre  $T_N$ , la sous-trajectoire des  $N$  premières transitions de  $T_{N+1}$ , c'est une condition nécessaire.

Puisque la propriété est vraie pour  $N$ , alors il existe un et un seul  $0 \leq s_0 < 2^N$  qui suit  $T_N$ .

Prenons  $v_0(a) = a \times 2^N + s_0$  avec  $a \in \{0, 1\}$  donc  $v_0(a) < 2^{N+1}$

Le terme  $a \times 2^N = 0$  si  $a = 0$  ou  $a \times 2^N = 2^N$  si  $a = 1$  et ce terme reste donc pair pour toutes les  $N$  premières transitions de  $T_N$ , puisque l'on divise par 2 à chaque transition (même si l'on a une transition de "type 1")

Détaillons la première transition :

$v_0(a)$  a la parité de  $s_0$  liée à  $t_0 \in \{0, 1\}$

Si  $t_0 = 0$  alors  $s_0$  est pair (car  $s_0$  suit  $T_N$ ) et  $v_1(a) = \frac{v_0(a)}{2} = \frac{a \times 2^N + s_0}{2} = a \times 2^{N-1} + \frac{s_0}{2} = a \times 2^{N-1} + s_1$

Si  $t_0 = 1$  alors  $s_0$  est impair (car  $s_0$  suit  $T_N$ ) et

$v_1(a) = \frac{3v_0(a) + 1}{2} = \frac{3(a \times 2^N + s_0) + 1}{2} = a \times 3 \times 2^{N-1} + \frac{3s_0 + 1}{2} = a \times 3 \times 2^{N-1} + s_1$

$v_1(a)$  a la parité de  $s_1$  qui suit  $t_1 \dots$

On pourrait aisément montrer par récurrence que :

Pour tout  $0 \leq n \leq N$ ,  $v_n(a) = a \times 3^{m_n} \times 2^{N-n} + s_n$  avec  $m_n$ , le nombre de transitions de "type 1" dans la sous trajectoire des  $n$  premières transitions de  $T_N$

On a vérifié cette propriété pour  $n = 0$  (avec  $m_0 = 0$ ) et pour  $n = 1$  et le reste du raisonnement pour cette récurrence est aussi très simple.

En réitérant le raisonnement, au bout de  $N$  transitions, ou en utilisant la formule de récurrence, on a :

Si  $m$  est le nombre de transitions de "type 1" de  $T_N$  alors

$v_N(a) = a \times 3^m + s_N$ , c'est la clé du raisonnement.

Deux cas sont possibles pour la transition  $N+1$

1. Si  $t_N = 0$  alors  $v_0(a)$  suit la trajectoire  $T_{N+1}$  si et seulement si  $v_N(a)$  est pair:
  - Si  $s_N$  est pair alors  $v_N(a)$  est pair si et seulement si  $a = 0$  et  $v_0(0)$  suit  $T_{N+1}$
  - Si  $s_N$  est impair alors  $v_N(a)$  est pair si et seulement si  $a = 1$  (car  $3^m$  est impair) et  $v_0(1)$  suit  $T_{N+1}$
2. Si  $t_N = 1$  alors  $v_0(a)$  suit la trajectoire  $T_{N+1}$  si et seulement si  $v_N(a)$  est impair:
  - Si  $s_N$  est impair alors  $v_N(a)$  est impair si et seulement si  $a = 0$  et  $v_0(0)$  suit  $T_{N+1}$
  - Si  $s_N$  est pair alors  $v_N(a)$  est impair si et seulement si  $a = 1$  (car  $3^m$  est impair) et  $v_0(1)$  suit  $T_{N+1}$

Conclusion : La propriété est vraie pour  $N+1$ , ce qui achève le raisonnement par récurrence.

## 2) Infinité de solutions qui suivent une trajectoire $T_N$

Pour montrer qu'il y a une infinité de solutions dans  $\mathbb{N}$  il suffit de considérer les valeurs :

$$V_0 = s_0 + n \times 2^N \text{ avec } n \in \mathbb{N} \text{ où } s_0 \text{ est la solution qui suit } T_N \text{ avec } s_0 < 2^N \text{ d'après 1)}$$

car, par construction,  $V_0$  suit  $T_N$  et  $V_N = s_N + n \times 3^m$

La démonstration de ce théorème est faite dans le cas standard mais elle se généralise sans aucune difficulté pour  $b_1$  quelconque.

On peut même généraliser ce théorème en prenant tout coefficient  $a_3$  impair positif au lieu du cas restrictif 3 en considérant :

$$\begin{cases} v_0 > 0 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{2} \text{ si } v_n \text{ est pair (transition de type 0)} \\ v_{n+1} = \frac{a_3 v_n + b_1}{2} \text{ si } v_n \text{ est impair (transition de type 1)} \end{cases} \quad \text{avec } a_3 = 2a + 1 \text{ et } a \geq 0$$

## Fin de la démonstration du Théorème 0

Pour les tests suivants uniquement :  $a_3 =$  ,  $b_1 =$

Recherche de  $v_0$  minimum pour la liste :

Recherche de  $v_0$  minimum pour une liste aléatoire de longueur maximale :

## 3. Localisation des éléments des éventuels cycles à l'aide du "Théorème 0"

On note  $V_0$  la solution minimale en valeur absolue qui suit la liste de transitions  $L(N, m, d)$  pour  $b_1$

On prend ici l'extension avec  $b_1 < 0$  au lieu de  $v_0 < 0$

D'après le "Théorème 0", on sait que  $V_0 \in ] 0 \quad 2^N [$  et que toutes les valeurs de  $v_0$  qui ont comme premières transitions celles de  $L(N, m, d)$  sont de la forme :  $v_0 = V_0 + a \times 2^N$  avec  $a \geq 0$  et  $v_N = V_N + a \times 3^m$

$$\text{Donc } v_N - v_0 = V_N - V_0 + a(3^m - 2^N)$$

On se limite aux cycles pour lesquels  $b_1$  et  $V_0$  sont premiers entre eux, c'est à dire  $\text{pgcd}(b_1, V_0) = 1$ .

Si l'on a un cycle à partir de  $v_0$  alors  $v_N = v_0$

$$\text{Soit } v_N - v_0 = 0 \Leftrightarrow V_N - V_0 = a(2^N - 3^m) \Leftrightarrow a = \frac{V_N - V_0}{2^N - 3^m} \text{ pour } N > 1. \text{ Le cas } N = 1 \text{ est trivial.}$$

- Si  $V_N - V_0 = 0$  alors  $a = 0$  ce qui signifie que l'on a un cycle à partir de  $V_0$

- Si  $V_N - V_0 \neq 0$  alors  $a > 0$  car on prend éventuellement l'option  $b_1 < 0$  et  $v_0 > 0$ . Bien sûr, il faut que  $a \in \mathbb{N}$ .

De plus, il est nécessaire que  $v_0 = V_0 + a \times 2^N < \text{VMax}(N-1) < 2^{f(N)+B_1}$

Donc que  $a \times 2^N < \text{VMax}(N-1)$ , en conservant  $V_0 > 0$ .

D'après les résultats de IV-13 qui donne des résultats plus précis pour les petites valeurs de N que dans le paragraphe précédent (paragraphe IV-14 pour  $b_1 < 0$ )

Pour rappel avec  $|b_1| = 1$  et  $\text{VMax}(N-1)$  à multiplier par  $|b_1|$ :

N	VMax(N-1)
8	24.54 ~ $2^{4.617}$
27	108.01 ~ $2^{6.755}$

et pour  $b_1 < 0$

N	VMax(N-1)
11	27.10 ~ $2^{4.760}$
19	219.31 ~ $2^{7.777}$

Dans le cas standard ( $b_1 = 1$ ), on a toujours  $\text{VMax}(N-1) < 2^N$  donc le cas  $a \neq 0$  est impossible.

Comme pour  $|b_1| < 1024$ , on a  $B_1 \leq 10$ .

Pour  $N \geq 27$ , on a toujours  $\text{VMax}(N-1) < 2^N$  donc le cas  $a \neq 0$  est impossible.

Pour  $N < 27$  et  $b_1 > 0$  ou pour  $N < 19$  et  $b_1 < 0$ , il se peut que dans quelques cas, on puisse avoir des solutions pour un cycle sans que ce soit la solution minimale  $V_0$ .

On peut reprendre les résultats obtenus en regardant quand la valeur maximale du cycle est supérieure à  $2^N$  pour voir que l'on est toujours dans ce cas  $V_0 + a \times 2^N = V_0 + \frac{V_N - V_0}{2^N - 3^m} \times 2^N$  où  $V_0$  est la solution minimale pour la liste  $L(N, m, d)$  avec cette valeur maximale comme première valeur du cycle.

On peut noter que dans de plus rares cas encore, c'est le cas même pour la valeur minimale du cycle et donc tous les éléments du cycle sont de cette forme.

Le tableau donne tous les cas où la valeur n'est pas la solution minimale pour la liste de transitions.

Structure du tableau :

$b_1$	$v_0$ (valeur minimale du cycle)	N	Liste des valeurs du cycle	L	$V_0$	$V_N$	a	$v_n$ (doit être égal à ce $v_0$ )
			$2^N - 3^m$					
			$v_0$ (valeur du cycle supérieure à $2^N$ )					

Pour  $b_1 > 0$

[Résultats à la fin du document](#)

[Voir les résultats](#)

Pour  $b_1 < 0$

[Résultats à la fin du document](#)

[Voir les résultats](#)

Si on a un cycle pour  $L(N, m, d)$ , alors la seule solution est la solution minimale  $V_0$  qui réalise la liste de

transitions , dans le cas où  $N \geq 27$  avec  $|b_1| < 1024$ ).

En prenant les  $N$  permutations circulaires sur cette liste, on a la propriété suivante :

**Propriété VI-3 : Si  $v$  a un cycle de longueur  $N$ , alors tous les différents éléments du cycle  $\{v_0, \dots, v_{N-1}\}$  vérifient  $v_n < 2^N$  pour  $0 \leq n < N$  (pour  $N \geq 27$  si  $|b_1| < 1024$ )**

#### 4. Raisonnement probabiliste avec la propriété fondamentale :

##### 1. Détermination du nombre $Cy(N)$ de candidats $v_0$ possibles pour un cycle de longueur $N$ :

###### 1. Cas particulier : $N$ est une "approximation de $X$ "

Pour  $v_0 > 0$ ,  $N$  correspond à une "approximation" par défaut.

Pour  $v_0 < 0$ ,  $N$  correspond à une "approximation" par excès.

D'après la localisation des valeurs d'un cycle de longueur  $N$  (paragraphe précédent VI-3), tous les éléments  $v_0$  sont inférieurs à  $2^N$  et sont aussi les solutions minimales d'une liste  $L(N, m, d)$  pour  $N \geq 27$  et  $|b_1| < 1024$ .

Dénombrer le nombre de  $v_0$  possibles revient à dénombrer le nombre de listes  $L(N, m, d)$  avec la bijection du "Théorème 0".

Le nombre de listes  $L(N, m, d)$  est facile à dénombrer, c'est le nombre de façons de placer  $m$  valeurs "1" (ou  $d$  valeurs "0") dans  $N$  emplacements, ce qui correspond au nombre de combinaisons

$$C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!} \text{ avec } n! = \prod_{i=1}^n i, \text{ soit la factorielle de } n.$$

Si l'on tient compte du fait que des cycles seraient équivalents et que l'on peut les identifier par leur plus petit élément (ou leur plus grand élément si  $v_0 < 0$ ).

Si on appelle  $Cy(N)$  le nombre de  $v_0$  candidats possibles,  $v_0$  minimum ( $v_0$  maximum si  $v_0 < 0$ ) pour le cycle qu'ils représentent, on a :

$$Cy(N) = \frac{C_N^m}{N}$$

###### 2. Cas général : $N$ quelconque

Pour  $v_0 > 0$  : Mais on peut facilement dénombrer exactement le nombre de candidats possibles (ou de nombre de listes de transitions) grâce à la liste frontière  $JGL(N)$  (décrite en IV et V) qui est la liste limite qui assure que pour tout  $0 < n \leq N$ ,  $v_n \geq v_0$  et  $v_n$  minimum puisque l'on priorise les transitions de "type 0", parmi toutes les listes vérifiant pour tout  $0 < n \leq N$ ,  $v_n \geq v_0$

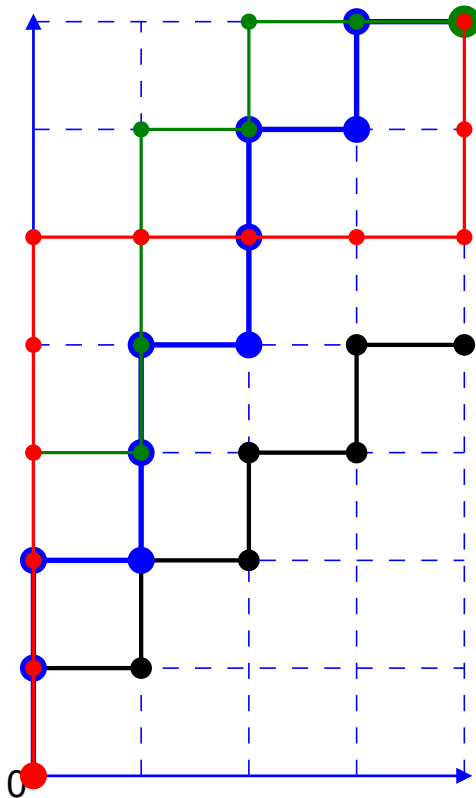
Symétriquement, pour  $v_0 < 0$  : on peut facilement dénombrer exactement le nombre de listes de transitions possibles grâce à la liste frontière  $JGL(N)$  qui est la liste limite qui assure que pour tout  $0 < n \leq N$ ,  $v_n \leq v_0 < 0$  et  $v_n$  maximum puisque l'on priorise les transitions de "type 0", parmi toutes les listes vérifiant pour tout  $0 < n \leq N$ ,  $v_n \leq v_0 < 0$

En effet, les candidats possibles sont les solutions des listes  $L(N, m, d)$  pour lesquelles à chaque longueur  $0 < i \leq N$ , le nombre de transitions de "type 1" pour les  $i$  premières transitions de la liste  $L(N, m, d)$  est supérieur ou égal à celui pour la liste  $JGL(N)$ . De plus  $m$  doit être égal à  $m_N$ , le nombre de transitions de "type 1" de  $JGL(N)$ .

Pour  $v_0 > 0$  : Pour les valeurs de  $\frac{m}{d} < X$  correspondant à des cycles potentiels (à des meilleures approximations de  $X$  par défaut), on modifie la dernière transition de JGL(N) en la mettant de "type 0".

On peut faire un schéma en représentant en ordonnée le nombre de transitions de "type 1". Les listes de transitions sont alors des chemins avec des déplacements vers le haut ou vers la droite (vers le Nord ou vers l'Est). Les listes de transitions valables sont celles qui restent au dessus de la frontière JGL et qui se terminent au bout de N étapes au même point que JGL(N).

- La ligne bleue représente la frontière JGL
- La ligne verte correspond à une liste de transitions valable car elle est toujours au dessus de JGL
- La ligne rouge correspond à une liste de transitions qui n'est pas valable parce qu'elle passe sous JGL
- La ligne noire correspond à la frontière pour les "mots de Dyck" (ou triangle de Catalan)
- Le gros point vert est le point d'arrivée des listes de transitions valables (au même emplacement que celui de JGL(N))



Algorithmes pour dénombrer les listes solutions (ils peuvent aussi servir pour les générer de manière exhaustive) :

- Méthode récursive : On construit (ou on compte simplement) la liste jusqu'à la profondeur N en conservant sa longueur et le nombre  $m$  de transitions de "type 1".
  - Si, pour la longueur  $n$ ,  $m$  est supérieur ou égal au nombre de transitions de "type 1" de JGL( $n$ ), alors on peut ajouter une transition de "type 0"
  - Si, pour la longueur  $n$ ,  $m$  est strictement inférieur au nombre  $n_{Max}$  de transitions de "type 1" de JGL(N), alors on peut ajouter une transition de "type 1"
- Méthode avec mémorisation du nombre de listes  $Nb(n, m)$  pour une longueur  $n$  et un nombre de transitions de "type 1" donnés  $m$ .

On a :

- $Nb(0, 0) = 1$
- $Nb(0, k) = 0$  pour  $1 \leq k \leq N$
- On construit les éléments pour  $n + 1$  à partir de ceux de  $n$  de la façon suivante :
- $Nb(n + 1, k) = 0$  pour  $0 \leq k \leq N$

- $Nb(n+1, k) += Nb(n, k-1)$  pour  $0 < k \leq m_N$  (ajout d'une transition de "type 1" possible)
- $Nb(n+1, k) += Nb(n, k)$  pour  $k \geq m_{n+1}$  (ajout d'une transition de "type 0" possible)
- Le nombre de liste qui nous intéresse est  $Nb(N, m_N)$

Cette méthode est bien plus rapide.

Cela rappelle les mots de Dyck ou le triangle de Catalan<sup>[5][6]</sup> avec  $m$  fois la lettre Y (axe Oy des ordonnées) et  $d$  fois la lettre X (axe Ox des abscisses) pour ne retenir que les chemins "au dessus" de la bissectrice, avec toujours plus de lettres Y que de X dans les "sous-mots"

On utilise la formule démontrée dans la page Wikipedia en anglais au sujet du triangle de Catalan<sup>[6]</sup> pour  $n$  Y et  $k$  X :

$$C(n, k) = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k}{k-1} = \binom{n+k}{n} - \binom{n+k}{n+1}$$

En remplaçant  $n+k$  par  $N$ ,  $n$  par  $m_N$  et  $k$  par  $d_N$

$$C(m_N, d_N) = \binom{N}{m_N} - \binom{N}{m_N+1} = \frac{2m_N - N + 1}{m_N + 1} \binom{N}{m_N} = \frac{m_N - d_N + 1}{m_N + 1} \binom{N}{m_N} = \left(1 - \frac{d_N}{m_N + 1}\right) \binom{N}{m_N}$$

Comme la frontière JGL est au dessus de la première bissectrice, car  $m > d$ , c'est donc plus sélectif pour les chemins possibles,

On a la majoration immédiate :

$$C_y(N) < \left(1 - \frac{d_N}{m_N + 1}\right) \binom{N}{m_N} = \left(1 - \frac{d_N}{m_N + 1}\right) C_N^{m_N}$$

### 3. Majoration de $C_y(N)$ pour les grandes valeurs de $N$

Comme la longueur minimale d'un cycle est au moins 1000, il est judicieux d'avoir une majoration dans ce cas.

Quand  $N$  est grand,  $m_N + 1 \approx m_N$ ,  $m_N \approx \frac{X}{1+X} N$  et  $d_N \approx \frac{1}{1+X} N$  et donc :

$$1 - \frac{d_N}{m_N + 1} \approx \frac{X-1}{X} \approx 0.415 < 1$$

On prendra donc  $C_y(N) < C_N^{m_N}$ , déjà avec une majoration d'un facteur 2 au minimum

Dans le paragraphe IV-16, on a vu que  $m_N = \lceil \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}3} N \rceil$

Donc  $C_y(N) < C_N^{\lceil N \text{Ln}2 / \text{Ln}3 \rceil}$  pour  $N > 1000$

Cherchons un équivalent de  $C_N^{\lceil N \text{Ln}2 / \text{Ln}3 \rceil}$  quand  $N$  assez grand :

$$\text{Ln}(n!) = \sum_{i=1}^n \text{Ln}(i) \approx \int_1^n \text{Ln}(X) dX = \left[ X \text{Ln}(X) - X \right]_1^n = n \text{Ln}(n) - n + 1$$

On peut utiliser la formule de Stirling :  $\text{Ln}(n!) \approx n \text{Ln}(n) - n$  pour  $n$  assez grand ( $n \geq 100$  pour une erreur relative de  $10^{-2}$ ).

Comme  $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ , on a :

$$\text{Ln}(C_n^p) = \text{Ln}\left(\frac{n!}{p!(n-p)!}\right) = \text{Ln}(n!) - \text{Ln}(p!) - \text{Ln}((n-p)!)$$

$$\text{Ln}(C_n^p) \approx n \text{Ln}(n) - n - p \text{Ln}(p) + p - (n-p) \text{Ln}(n-p) + n - p$$

$\text{Ln}(C_n^p) \approx n \text{Ln}(n) - p \text{Ln}(p) - (n-p) \text{Ln}(n-p)$  après simplifications

Comme  $\lfloor \frac{N \text{Ln}2}{\text{Ln}3} \rfloor > \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}3} N > \frac{N}{2}$  pour N assez grand, et  $\frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}3} = \frac{X}{1+X}$  avec  $X = \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}3 - \text{Ln}2} \approx 1,70951129135$

$$\text{Ln}(C_N^{\lfloor \frac{N \text{Ln}2}{\text{Ln}3} \rfloor}) \approx N \text{Ln}(N) - \frac{XN}{1+X} \text{Ln}\left(\frac{XN}{1+X}\right) - \frac{N}{1+X} \text{Ln}\left(\frac{N}{1+X}\right)$$

$$\text{Ln}(C_N^{\lfloor \frac{N \text{Ln}2}{\text{Ln}3} \rfloor}) \approx$$

$$N \text{Ln}(N) - \frac{XN}{1+X} \text{Ln}(X) - \frac{XN}{1+X} \text{Ln}(N) + \frac{XN}{1+X} \text{Ln}(1+X) - \frac{N}{1+X} \text{Ln}(N) + \frac{N}{1+X} \text{Ln}(1+X)$$

$$\text{Ln}(C_N^{\lfloor \frac{N \text{Ln}2}{\text{Ln}3} \rfloor}) \approx \frac{-XN}{1+X} \text{Ln}(X) + \frac{XN}{1+X} \text{Ln}(1+X) + \frac{N}{1+X} \text{Ln}(1+X) \text{ après simplifications}$$

$$\text{Ln}(C_N^{\lfloor \frac{N \text{Ln}2}{\text{Ln}3} \rfloor}) \approx \left( \text{Ln}(1+X) - \frac{X}{1+X} \text{Ln}(X) \right) N$$

$$\text{Ln}(C_N^{\lfloor \frac{N \text{Ln}2}{\text{Ln}3} \rfloor}) \approx 0.658459 N$$

$$C_N^{\lfloor \frac{N \text{Ln}2}{\text{Ln}3} \rfloor} \approx e^{0.658459 N}$$

Pour avoir le nombre de bits de  $\text{Ln}(C_N^{\lfloor \frac{N \text{Ln}2}{\text{Ln}3} \rfloor})$ , on divise par  $\text{Ln}2$

On obtient un nombre de bits voisin de  $\frac{0.658459}{\text{Ln}2} N \approx 0.949956 N < 0.95 N$

$$\text{Soit } C_N^m \approx 0.6 \times 2^{0.95 N} < 2^{0.95 N}$$

$$\text{ou } C_N^m \approx 10^{0.286 N}$$

Donc,  $C_y(N) < C_N^m < 2^{0.95 N}$ , la majoration est déjà très large (639 fois supérieur pour  $N = 1539$ , 438 fois supérieur pour  $N = 1054$  dans le cas où  $v_0 < 0$  au nombre de mots de Dyck).

On prendra cette valeur approchée par excès :

$$C_y(N) < 2^{0.95 N} \text{ pour } N > 1000.$$

Remarques :

- En prenant cette majoration large, c'est comme si l'on ne faisait aucune restriction sur les chemins et que l'on prenaient les  $C_N^m$  listes de transitions et donc qu'on ne considérait pas  $v_0$  minimal ( $v_0$  maximal dans le cas  $v_0 < 0$ )
- Dans le cas où N correspond à une "approximation" de X, alors  $C_y(N) = \frac{C_N^m}{N}$  et donc  $C_y(N) < 2^{0.95 N - N/\text{Ln}2}$

#### 4. Test

Test pour la longueur N :

Pour  $N = 65$ , en cliquant sur le bouton "Test", on obtient la ligne : "Number of lists for cycle :  $\sim 2^{52.44} \sim 2^{0.81 \times N} = 6113392816333320$ "

On obtient alors les résultats suivants (même avec quelques couples  $\frac{m}{d} > X$ , marqués avec \*) :

N	Nombre de listes de transitions avec $v_n > v$
19*	$\sim 2^{11.37} \sim 2^{0.60 \times N} = 2652$
27	$\sim 2^{18.25} \sim 2^{0.68 \times N} = 312455$
46	$\sim 2^{35.15} \sim 2^{0.76 \times N} = 38036848410$



65	$\sim 2^{52.44} \sim 2^{0.81 \times N} = 6113392816333320$
84*	$\sim 2^{69.93} \sim 2^{0.83 \times N} = 1122428422670255691408$
317	$\sim 2^{88.40} \sim 2^{0.91 \times N} = 656806675415484094200100898233709221596805033311728420917526$
401	$\sim 2^{367.69} \sim 2^{0.92 \times N} = 48419144899448414091448740183599746637523196430021069231903$
485	$\sim 2^{447.07} \sim 2^{0.92 \times N} =$ 38176868759050134271911329690220347628482378391118516565097049761310997707549
1054*	$\sim 2^{985.92} \sim 2^{0.94 \times N}$
1539	$\sim 2^{1445.83} \sim 2^{0.94 \times N}$
14187	$\sim 2^{13456.06}$
25187	$\sim 2^{24468.55}$

On peut vérifier que pour ces différentes valeurs de  $N$ , on a bien  $Cy(N) = \frac{C_N^m}{N}$

Remarques :

- Dans le cas de la suite de Syracuse standard, on a trouvé que la longueur minimale d'un cycle est  $N = 114208327604$ .  
Générer une liste aléatoirement est possible (on peut même la construire étape par étape), tester cette seule liste, c'est à dire, voir si  $v_N = v_0$ , est déjà hors de portée avec mon ordinateur personnel, mais il faudrait tester  $Cy(N) \approx 10^{0.286 \times 114208327604} \approx 10^{32663581695}$  listes ce qui est irréaliste. De plus, il faudrait ensuite recommencer pour toutes les valeurs possibles de  $N$ ... ce n'est assurément pas la bonne méthode de raisonnement.
- Si l'on prend pour valeur de  $N$ , une valeur qui correspond à une "approximation" de  $X$  par défaut ou par excès,  $N \times Cy(N)$  représente le nombre de nombres révolutionnaires. Ainsi, on peut faire la distinction entre deux notions, rareté et abondance, qui ne sont pas antinomiques.

## 2. Propriété VI-4-2 : La probabilité de " $v_n$ pair" est $\frac{1}{2}$

Cette propriété est couramment admise mais regardons un peu dans le cas standard.

C'est uniquement pour constater le "brassage" des bits pour les applications éventuelles de chiffrement.

Pour  $b_1 \neq 1$ , on admettra cette propriété.

- Si  $b_1 = 2b + 1 > 0$  et  $v_0 > 0$ , alors il suffit de considérer la décomposition en base 2 de  $b$  pour obtenir le résultat similaire.
- Si  $b_1 = 2b + 1 < 0$ , alors :
  - Si  $v_0 < -b_1$ , alors il existe  $n$  tel que  $v_n < 0$  et on peut se ramener au cas précédent en changeant  $v_n$  et  $b_1$  en leurs opposés
  - Si  $v_0 > -b_1$ , alors  $\frac{3v_n + b_1}{2} > v_n$  et il faudrait considérer la soustraction...

Dans la propriété, on peut ajouter l'équiprobabilité pour chaque bit de valoir 0 ou 1.

Cela est vrai lorsque l'on est dans le cycle trivial réduit  $\{1,2\}$ , on considère le cas  $v_0 > 4$ .

Faisons un raisonnement par récurrence.

C'est vrai pour  $v_0$ , puisque  $v_0$  est quelconque.

On suppose que la propriété est vraie pour le rang  $n$  et on montre que c'est vrai pour le rang  $(n + 1)$ .

Posons  $v_n = \sum_{p=0}^N a_p \times 2^p$  avec  $a_p = 0$  ou  $a_p = 1$ , sa décomposition en base 2.

- Si  $a_0 = 0$  alors  $v_n$  est pair et  $v_{n+1} = \sum_{p=1}^N a_p \times 2^{p-1} = \sum_{p=0}^{N-1} a'_p \times 2^p$  avec  $a'_p = a_{p+1}$  donc  $v_{n+1}$  a la parité de  $a'_0 = a_1$  qui est équiprobablement 0 ou 1. Pour les autres bits, l'équiprobabilité est directe.
- Si  $a_0 = 1$  alors  $v_n$  est impair et

$$v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{2} = \frac{1 + v_n + 2v_n}{2} = \frac{1 + \sum_{p=0}^N a_p \times 2^p + \sum_{p=0}^N a_p \times 2^{p+1}}{2} = \sum_{p=0}^{N+1} a'_p \times 2^p \text{ avec}$$

$$\begin{cases} r_0 = 1 \\ n_p = r_p + a_p + a_{p+1} \\ a'_p = n_p \text{ modulo } 2 \\ r_{p+1} = 1 \text{ si } n_p \geq 2 \\ r_{p+1} = 0 \text{ si } n_p < 2 \end{cases}$$

donc  $v_{n+1}$  a la parité de  $a'_0 = n_0 \text{ modulo } 2 = (r_0 + a_0 + a_1) \text{ modulo } 2 = (1 + 1 + a_1) \text{ modulo } 2 = a_1$  qui est équiprobablement 0 ou 1.

Pour les autres bits :

- Si  $r_p = 0$  alors  $a'_p = (0 + a_p + a_{p+1}) \text{ modulo } 2$  est équiprobablement 0 ou 1.
- Si  $r_p = 1$  alors  $a'_p = (1 + a_p + a_{p+1}) \text{ modulo } 2$  est équiprobablement 0 ou 1.

Cela prouve la propriété au rang  $(n+1)$  et donc en particulier que la probabilité de " $v_n$  pair" est  $\frac{1}{2}$

### 3. Répartition des valeurs de $v_0$ solutions des listes candidates

Ici,  $v_0$  représente la solution minimale de la liste de transitions candidate

#### 1. La probabilité que $v_0 < 2^{N-k}$ est $\frac{1}{2^k}$

Notations :

- $v_0 = v_{0,N} = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \times 2^n < 2^N$  est la solution minimale de la liste  $L(N, m, d)$   
(pour  $N \geq 27$  et  $|b_1| < 1024$ , c'est bien la seule solution qui permet d'avoir un cycle)
- $v_{0,N-k} < 2^{N-k}$  est la solution minimale des  $(N-k)$  premières transitions d'une liste  $L(N, m, d)$
- $v_{n,N-k}$  est la valeur courante obtenue après  $n$  étapes à partir de la solution minimale  $v_{0,N-k}$
- $p$  est la probabilité que la dernière transition  $t_{N-1}$  de la liste  $L(N, m, d)$  soit de "type 1"

On admet que la valeur  $v_{N-1,N-1}$  (la valeur courante au bout de  $N-1$  étapes à partir de  $v_{0,N-1}$ ) a une parité équiprobable ( $\frac{1}{2}$  d'être pair,  $\frac{1}{2}$  d'être impair)

Si ( $(v_{N-1,N-1}$  est pair et  $t_{N-1}$  est de "type 1") ou ( $v_{N-1,N-1}$  est impair et  $t_{N-1}$  est de "type 0")) dont la probabilité est  $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2}$ , qui est indépendante de  $p$ ,

alors la dernière transition n'est pas naturelle ( $d_{N-1} \neq 0$ ), c'est-à-dire que  $t_{N-1}$  ne correspond pas au type de transition obtenu à partir de  $v_{N-1,N-1}$  et alors la solution minimale est  $v_{0,N} = v_{0,N-1} + 2^{N-1}$  (d'après VI-2) et  $v_{0,N} \geq 2^{N-1}$

Inversement, si ( $(v_{N-1,N-1}$  est pair et  $t_{N-1}$  est de "type 0") ou ( $v_{N-1,N-1}$  est impair et  $t_{N-1}$  est de

"type 1")) dont la probabilité est  $\frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}$ , qui est indépendante de  $p$ ,

alors la dernière transition est naturelle, c'est-à-dire que  $t_{N-1}$  correspond au type de transition obtenu à partir de  $v_{N-1, N-1}$  et alors la solution minimale est  $v_{0, N} = v_{0, N-1}$  (d'après VI-2) et  $v_{0, N} < 2^{N-1}$

Donc la probabilité que  $2^{N-1} \leq v_{0, N} < 2^N$  est égale à  $\frac{1}{2}$

En recommençant le même raisonnement pour les  $k$  dernières transitions,

- La probabilité que  $2^{N-k} \leq v_{0, N-k} < 2^{N-k+1}$  est égale à  $\frac{1}{2^k}$
- $v_{0, N} = v_{0, N-k} < 2^{N-k}$  si et seulement si les  $k$  dernières transitions sont naturelles à partir de  $v_{0, N-k}$  et la probabilité est  $\frac{1}{2^k}$
- Inversement, la probabilité que  $2^{N-k} \leq v_{0, N}$  est  $1 - \frac{1}{2^k}$

Il reste à déterminer pour quelles valeurs de  $k$  cette relation est valable.

## 2. Valeurs de $v_0$ qui bouclent dans un cycle trivial pour une liste

Le raisonnement précédent n'aurait pas vraiment de valeur pour les valeurs de  $v_0$  qui bouclent dans un cycle pour une liste de transitions candidate.

Il est donc important de considérer ces éventuels cas.

Dans le cas standard, pour toute liste de transitions candidate, comme on a  $v_n > v_0$  pour tout  $0 < n < N$  et que la liste JGL commence par les transitions "11" (pour éviter le cycle trivial et donc  $v_0 > 1$ ), on est assuré que la valeur  $v_n = 1$  n'est jamais atteinte et donc que l'on n'est pas dans le cycle trivial même si la liste de transitions finit par un grand nombre d'alternances "10"

Pour  $v_0 > 0$ , par construction, la liste JGL élimine déjà les valeurs de  $v_0$  qui sont les valeurs minimales des cycles triviaux puisqu'il faut "modifier" la dernière transition en transition de "type 0" pour avoir un cycle car on se place toujours pour  $N$ , la longueur minimale d'un cycle, qui correspond à une "approximation" de  $X$ .

Pour  $v_0 < 0$ , si les valeurs minimales d'un cycle trivial formaient aussi un cycle, cela signifierait que  $N$  est un multiple de cette longueur, ce qui n'est pas intéressant. Mais c'est surtout impossible car il faudrait exactement la même proportion de transitions de "type 1" (par exemple) et l'algorithme de Stern-Brocot donne des fractions irréductibles.

Il reste à identifier les listes pour lesquelles on peut atteindre un cycle trivial à partir d'une valeur initiale inférieure à la valeur minimale du cycle.

Ce phénomène doit être assez rare par rapport au nombre de listes  $Cy(N)$ , mais on l'étudiera plus précisément dans l'étude de la divergence (paragraphe VII-2) en reprenant les résultats obtenus pour  $|b_1| < 1024$

Mais pour ces valeurs, il faudrait que la proportion de transitions soit identique à celle de JGL et qu'ensuite, à la fin, une ou plusieurs transitions permettent de revenir à la valeur initiale (strictement inférieure), ce qui romprait le cycle. Cette rupture est équivalente à au moins un bit de poids fort dans  $v_0$  et donc  $v_0$  ne peut pas être inférieure à la valeur minimale du cycle.

**Conclusion :** De telles listes ne sont pas des listes candidates pour avoir un cycle de longueur  $N$ , la longueur minimale possible, qui correspond forcément à  $N$  "approximation" de  $X$

## 4. Majoration du nombre de $v_0 < 2^{N-k}$

Comme  $Cy(N)$  est très grand et même tant que  $\frac{Cy(N)}{2^k}$  est grand, alors on doit se rapprocher d'une répartition des  $v_0$  proche des probabilités. Même si la suite de Syracuse est parfaitement déterminée à partir de  $v_0$  et que ce n'est donc pas un phénomène aléatoire, mais très déterministe et mécanique, il est intéressant de le voir comme un phénomène aléatoire, qui suit une loi de probabilité.

Ce qui nous semble chaotique pour une valeur de  $v_0$  (ou une liste de transitions) ne l'est plus du tout lorsque l'on regarde l'ensemble.

En première approximation, pour avoir une idée, en regardant ce qu'il se passe à partir des dernières transitions, on peut dire que les  $v_0$  se répartissent ainsi :

$$\frac{Cy(N)}{2} \text{ appartiennent à } [ 2^{N-1} \quad 2^N [$$

$$\frac{Cy(N)}{4} \text{ appartiennent à } [ 2^{N-2} \quad 2^{N-1} [$$

...

$$\frac{Cy(N)}{2^k} \text{ appartiennent à } [ 2^{N-k} \quad 2^{N-k+1} [$$

$$\text{et donc } \frac{Cy(N)}{2^k} \text{ appartiennent à } ] 0 \quad 2^{N-k} [$$

Et comme  $Cy(N) < \frac{2^{0.95N}}{N} = 2^{0.95N - \text{Ln}(N)/\text{Ln}2}$  pour N "approximation" de  $X$

$$\text{alors } \frac{Cy(N)}{2^k} < 1 \Leftrightarrow Cy(N) < 2^k \Leftrightarrow k > 0.95N - \frac{\text{Ln}(N)}{\text{Ln}2}$$

Tous les  $v_0$  devraient être supérieurs à  $2^{N-0.95N} = 2^{0.05N}$ , ou peut-être qu'il reste marginalement quelques exceptions dans les toutes dernières valeurs de  $k$ , quand  $k \approx 0.95N$  car le nombre de valeurs restantes est trop faible pour avoir un résultat parfait... les  $\frac{\text{Ln}(N)}{\text{Ln}2}$  étapes pouvant même encore servir de marge d'erreur.

Faisons un raisonnement plus rigoureux pour majorer le nombre de listes de transitions restantes (pour lesquelles  $v_0 < 2^{N-k}$ ) :

On peut voir  $d_{N-1} = 1$  comme une épreuve de Bernouilli de paramètre  $p = \frac{1}{2}$ , paramètre optimal pour l'application des résultats statistiques.

Pour la dernière transition :

Si on considère  $X_n$ , le nombre de fois que  $d_{N-1} = 1$  (pour la transition  $N-1$ ) pour toutes les  $n = Cy(N)$

$$\text{listes de transitions, c'est alors une loi binomiale et } Z_n = \frac{X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{p(1-p)n}} = \frac{X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})n}} = \frac{X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$$

converge vers la loi normale centrée et réduite (pour  $n > 30$  car  $p = \frac{1}{2}$ ).

De plus, on a  $P(Z_n \leq 4) > 0.9999$  (puisque dans les tables de la loi normale centrée réduite, la valeur est 1.0000)

On peut considérer que l'on est dans ce cas pour majorer le nombre de  $v_0$  restants, c'est-à-dire le nombre de  $v_0 < 2^{N-1}$  pour les listes de transitions candidates. Si tel n'était pas le cas, ce n'est pas bien problématique puisque l'on va enchaîner le même raisonnement pour les transitions précédentes.

$$\text{Or } Z_n \leq 4 \Leftrightarrow X_n < \frac{n}{2} + 4\sqrt{\frac{n}{4}} = \frac{n}{2} + 2\sqrt{n} = \frac{n}{2}(1 + 4n^{-1/2})$$

Notons  $A_1$  ce majorant de  $X_n$  et  $A_0 = n$  le nombre initial de listes candidates.

Si  $n > 2^{10}$  alors on peut toujours utiliser la convergence vers la loi normale (car la limite d'utilisation est proche de  $n > 2^5$ ) et  $u = 4n^{-1/2} < 2^{-3}$

On peut toujours utiliser l'inégalité  $1 + u < e^u$  même si la majoration devient imprécise pour  $u = 0.125$  car

$$\frac{e^{0.125}}{1.125} \approx 2.74$$

$A_1 = \frac{n}{2}(1 + u) < \frac{n}{2}e^u = \frac{n}{2}e^{4n^{-1/2}} = R_1$ , le majorant en utilisant l'exponentielle qui permet en

enchaînement plus facile

On peut reprendre exactement le même raisonnement avec la transition  $N-2$  avec le même formalisme, tant que le nombre de listes restantes est suffisant.

$$\text{On a } R_2 \leq \frac{R_1}{2} e^{4R_1^{-1/2}}$$

$$\text{Or } R_1^{-1/2} = \left(\frac{n}{2} e^{4n^{-1/2}}\right)^{-1/2} = \left(\frac{n}{2}\right)^{-1/2} e^{-2n^{-1/2}} < \left(\frac{n}{2}\right)^{-1/2} \text{ car } -2n^{-1/2} < 0$$

$$\text{Donc } R_2 \leq \frac{n}{4} e^{4n^{-1/2}} e^{4(n/2)^{-1/2}} = \frac{n}{4} e^{4n^{-1/2}} e^{4n^{-1/2}\sqrt{2}} = \frac{n}{4} e^{4n^{-1/2}(1+\sqrt{2})}$$

En recommençant avec le même formalisme pour  $d_{N-k}$ , tant que l'on peut utiliser la convergence vers la loi normale, on a :

$$R_k \leq \frac{n}{2^k} e^{4n^{-1/2}S_k} \text{ avec } S_k = \sum_{i=1}^k \sqrt{2}^{(i-1)} = \frac{\sqrt{2}^k - 1}{\sqrt{2} - 1} < \frac{\sqrt{2}^k}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}^k}{\sqrt{2} - 1}$$

On peut démontrer ce résultat par récurrence, la formule étant vérifiée pour  $k = 1$  et  $k = 2$ .

Si l'on suppose qu'elle est vraie pour  $k$ , on montre qu'elle est vraie pour  $k + 1$

$$R_{k+1} \leq \frac{R_k}{2} e^{4R_k^{-1/2}}$$

$$\text{Or } R_k^{-1/2} = \left(\frac{n}{2^k} e^{4n^{-1/2}S_k}\right)^{-1/2} = \left(\frac{n}{2^k}\right)^{-1/2} e^{-2n^{-1/2}S_k} < \left(\frac{n}{2^k}\right)^{-1/2} = n^{-1/2}\sqrt{2}^k \text{ car } -2n^{-1/2}S_k < 0$$

$$\text{Donc } R_{k+1} \leq \frac{n}{2^{k+1}} e^{4n^{-1/2}S_k} e^{4n^{-1/2}\sqrt{2}^k} = \frac{n}{2^{k+1}} e^{4n^{-1/2}S_{k+1}}, \text{ la propriété est vérifiée}$$

On peut améliorer un peu l'expression de  $R_k$  avec la dernière majoration de  $S_k$

$$R_k \leq \frac{n}{2^k} e^{4\sqrt{2}^k / ((\sqrt{2} - 1)\sqrt{n})}$$

Soit  $K$  tel que  $2^{K+9} \leq n \leq 2^{K+10}$ , on minore  $n$  par une puissance de 2.

On est assuré que  $R_{K-1} > 2^{10}$  donc on peut utiliser la formule liée à la convergence vers la loi normale.

$$R_K \leq \frac{n}{2^K} e^{4\sqrt{2}^K / ((\sqrt{2} - 1)\sqrt{2^{K+10}})} = \frac{n}{2^K} e^{1/(2^3(\sqrt{2} - 1))} \approx 1.352 \times \frac{n}{2^K} < 2 \times \frac{n}{2^K} < \frac{2 \times 2^{K+10}}{2^K} = 2^{11} = 2048$$

C'est à dire, que lorsque l'on a pris en compte les  $K$  dernières transitions, l'erreur relative maximale est de 35.2% par rapport à la valeur approchée  $\frac{n}{2^K}$ , ce qui fait que l'erreur est de moins d'une "étape" !

On peut dire, en analysant les  $K$  dernières transitions, que le nombre de valeurs de  $v_0 < 2^{N-K}$  est inférieur à 2048.

La majoration  $1 + u < e^u$  est toujours vraie mais devient trop large.

Cependant, jusqu'à  $R_k > 30$ , la convergence vers la loi normale est théoriquement valable et cela permet d'utiliser encore pendant quelques étapes la décroissance majorée sans utiliser la fonction exponentielle.

On a alors  $R_K < 2048$  (on prend  $R_K = 2048$ ) et pour  $k > K$ , on utilise la majoration obtenue au début du raisonnement  $R_{k+1} = \frac{R_k}{2} (1 + 4 R_k^{-1/2})$  tant que  $R_k > 30$

On obtient alors la décroissance suivante :

$k - K$	$R_k$
0	2048
1	1115
2	625
3	363
4	220
5	140
6	94
7	67
8	50
9	40
10	33
11	28

On peut dire, en analysant les  $K + 11$  dernières transitions, que le nombre de valeurs de  $v_0 < 2^{N - (K + 11)}$  est inférieur à 30.

Ensuite, on n'a pas de fondement mathématique pour conclure, mis à part le fait que la suite de Syracuse n'est pas un processus aléatoire mais un processus déterministe. En effet, une fois les listes de transitions déterminées, les tester un nombre quelconque de fois donnera toujours les mêmes résultats. Et le mécanisme n'a pas de raison de changer parce qu'il reste un ensemble réduit.

Examinons, le nombre de transitions  $k$  maximum possible pour que plus aucune valeur de  $v_0$  soit inférieure à  $2^{0.04N}$  ou encore que plus aucune des 30 valeurs restantes ne subsistent au bout de  $0.96N$  étapes.

On a  $2^{K+9} \leq n = Cy(N) < 2^{0.95N} \leq 2^{K+10}$ , donc  $K+9 < 0.95N$  soit  $K+11 < 0.95N+2$

On cherche la valeur maximale de  $k$  telle que  $K+11+k < 0.95N+2+k \leq 0.96N$

Soit  $k < 0.01N - 2$

Dans le cas de la suite de Syracuse standard, la longueur minimale d'un éventuel cycle pour  $v$  est supérieure ou égale à 114208327604, donc  $k > 10^9$  alors que 5 suffiraient dans l'absolu car  $30 < 32 = 2^5$ , même si 2 ou 3 étapes supplémentaires, tout au plus, pourraient être possibles.

Pour  $b_1 \neq 1$ , comme  $N > 1000$  (1539 pour  $v_0 > 0$  et 1054 pour  $v_0 < 0$ ), on a au moins respectivement 13 ou 8 étapes. De plus, si  $N$  correspond à une "approximation" de  $X$ , on a encore  $\frac{\text{Ln}(N)}{\text{Ln}2} = K+9 > 9$  étapes supplémentaires possibles !

On peut donc affirmer que la valeur minimale de  $v_0$ , pour toutes les listes de transitions candidates, est supérieure à  $2^{0.04N}$

On verra expérimentalement que la modélisation en prenant le nombre restant égal à  $\frac{1}{2^k}$  est très robuste

avec un coefficient de corrélation linéaire de plus de 0.999 en valeur absolue si l'on considère le logarithme népérien de l'effectif restant.

Pour  $N = 1054$  et  $v_0 < 0$ , on a  $C_N(N) < 2^{986}$ , ce qui signifie que la valeur minimale de  $v_0$  est supérieure à  $2^{50}$

C'est déjà suffisant, mais reprenons le raisonnement différemment en éliminant le biais informatique qui consiste à réduire le nombre de listes de transitions à tester et donc à considérer  $v_0$  minimal

( $v_0$  maximal pour  $v_0 < 0$ )

En effet, si l'on considère les  $C_N^m$  listes de transitions, alors pour avoir un cycle de longueur  $N$ , il faut alors que  $N$  valeurs de  $v_0$  (les  $N$  éléments du cycle, puisque  $v_0$  n'est plus minimal ( $v_0$  maximal pour  $v_0 < 0$ )) soient solutions.

Comme  $N > 1000$  avec les tests réalisés pour la vérification de la suite, on peut utiliser sans problème la majoration avec l'exponentielle pour les  $K$  dernières étapes et la convergence vers la loi normale pour les 2 transitions suivantes qui permettent de garantir que le nombre de valeurs de  $v_0$  restantes est environ  $625 < 1000 < N$  d'après le tableau précédent.

Donc, le résultat est assuré en prenant en compte les  $K + 2$  dernières transitions.

Comme on a  $2^{K+9} < C_N^m < 2^{0.95N} \leq 2^{K+10}$ , donc  $K + 2 < 0.95N - 7 < 0.96N$  pour  $N > 1000$  (avec quelques unités de marge qui sont autant de divisions quasiment par 2 du nombre restant) donc tous les éléments d'un cycle sont supérieurs à  $2^{0.04N}$

**Toutes les valeurs de  $v_0$ , à partir desquelles on pourrait avoir un cycle, vérifient  $v_0 \geq 2^{0.04N}$  pour  $N > 1000$  et pour  $|b_1| < 1024$ .**

Remarque : Ce raisonnement peut se généraliser en considérant  $\frac{v_N}{v_0} \approx \frac{3^m}{2^N}$  (pas forcément voisin de 1). Il suffit alors de considérer les  $C_N^m$  listes de transitions  $L(N, m, d)$  et on peut avoir une répartition des  $v_0$  solution ainsi qu'un ordre de grandeur de la valeur minimale.

## 5. Synthèse sur l'existence de cycles

D'après le paragraphe VI-1-2, synthèse de la longueur minimale d'un cycle, on a vu que la valeur maximale de  $v_0$  était inférieure à  $v_{Max} = 2^{f(N)+B_1}$  avec  $f(N) = \frac{2}{\ln 2} \ln(N) + 4$  (même si on sait que  $v_{Max}$  augmente par saut à chaque "approximation" de  $X$  et est bien inférieure pour les autres valeurs de  $N$ )

D'après la conclusion du paragraphe précédent VI-4-4, on a que la valeur minimale de  $v_0$ , pour toutes les listes de transitions pouvant correspondre à un cycle, était supérieure à  $v_{Min} = 2^{0.04N}$  dans le cas où  $N > 1000$  pour  $|b_1| < 1024$ .

Si  $v_{Max} < v_{Min}$ , alors il ne peut y avoir de cycle.

Ce qui est équivalent à  $g(N) = 0.04N - \frac{2}{\ln 2} \ln(N) - 4 > B_1$

On dérive pour étudier les variations sur  $[1000, +\infty[$  :  $g'(N) = 0.04 - \frac{2}{\ln 2 N} > 0$  pour  $N > \frac{2}{0.04 \ln 2} = 73$  (donc  $g$  est croissante sur  $[73, +\infty[$ )

Or  $g(1000) \approx 16.06$  qui est donc le minimum de  $g$  sur  $[1000, +\infty[$

Dans le cas standard, comme  $N \geq 114208327604$ , on a  $g(114208327604) = 4568333026$ , donc il n'y a pas d'autre cycle.

Comme  $B_1 \leq 10$  pour  $|b_1| < 1024$ , l'inégalité est vérifiée. Comme  $g(1539) = 36.38$  et  $g(1054) = 18.07$ , cela laisserait encore au moins 26 ou 8 étapes supplémentaires au minimum, pour les cas  $N = 1539$ , respectivement  $N = 1054$ , pour l'approximation de  $v_{Min}$  et donc il n'y a pas d'autres cycles que les cycles triviaux.

Toutefois, les majorations sont larges car pour  $N = 1054$  et  $v_0 < 0$ , on a  $Cy(N) < 2^{986}$ , ce qui signifie  $> 2^{50}$  ou  $v_{Max} < 2^{22+B1} < 2^{32}$  dans tous les cas de  $|b_1| < 1024$

On aurait pu aussi tester les suites avec  $N_0 = 22$  au lieu de  $N_0 = 17$  et les longueurs minimales auraient été  $N = 14187$  pour  $v_0 > 0$  et  $N = 25781$  pour  $v_0 < 0$ , ce qui aurait engendré un peu plus de calculs préalables mais qui auraient aussi permis d'avoir une marge bien plus confortable (plus de 700 car  $C(14187) = 2^{13456.06}$  et  $C(25781) = 2^{24468.55}$  alors que  $v_{Max} < 2^{28+B1}$ ).

**Conclusion : Il ne peut pas y avoir de cycle autre que les cycles triviaux pour  $|b_1| < 1024$ .**

On peut remarquer que l'on utilise pas la condition nécessaire et suffisante, encore plus restrictive, à savoir

$$v_N = v_0$$

C'est déjà assez extraordinaire qu'en fixant seulement 5% des bits ( $0.05 \times N$  bits de poids faibles valant 0 ou 1), on peut avoir  $\frac{v_N}{v_0} \approx 1$ , c'est à dire que les 95% dernières transitions se font naturellement.

Il n'existe pas d'autre cycle mais on peut trouver des valeurs de  $v_0$  qui réalisent des "presque" cycles à la précision relative aussi faible que l'on veut, le détail est dans le paragraphe IX-1, c'est le "Théorème 1".

## 6. Résultats expérimentaux

On teste aléatoirement des listes de transitions  $L(N, m, d)$  candidates pour éventuellement obtenir un cycle même si pour certaines valeurs de  $N$ , il ne pourrait y avoir de cycle **sauf pour  $b_1 \neq 1$** .

Les listes de transitions choisies sont "au dessus" de  $JGL(N)$  et l'on peut voir la répartition de  $v_0$ , c'est ce qui nous intéresse principalement.

Pour les petites valeurs de  $N$ , les calculs sont exhaustifs, ce qui permet de voir l'évolution de  $r_{N_k}$  à la fin, en condition réelle, pour voir que c'est un processus très déterministe, très loin d'un lancer de pièce à pile ou face.

Evidemment, pour les valeurs de  $N$  plus grandes, le nombre de listes testées est très faible, le test n'est pas exhaustif, loin de là !... mais cela permet de voir que sur les échantillons aléatoires, la méthode statistique pour la répartition des  $v_0$  est très robuste (coefficient de corrélation linéaire supérieur à 0.999)

Dans les résultats concernant la répartition de  $v_0$ , voici ce que représente :

- $nb$  : le nombre de listes à tester pour  $N$ , soit 312455 pour  $N = 27$
- $e_k$ , le nombre effectif de  $v_0$  tels que  $2^{N-k} \leq v_0 < 2^{N-k+1}$  (soit  $N - NbBits(v_0) = k - 1$ )
- $re_k$ , le nombre effectif de  $v_0$  tels que  $v_0 < 2^{N-k}$
- $A_k = \frac{re_{k-1}}{2} + 2\sqrt{re_{k-1}}$ , l'approximation de  $re_k$  à 4 écart type en approximant par une loi normale
- $R_k = \frac{nb}{2^k} e^{4(\sqrt{2^k}-1)/(\sqrt{2}-1)/\sqrt{nb}}$  avec 4 écart type en cumulant les approximations
- $q_k = \frac{R_k}{\frac{nb}{2^k}}$ , le rapport avec la valeur centrale théorique

Au dessous de la section suivante permettant les tests (même code que pour le test de la suite à la fin du document), figurent les résultats complets pour  $N = 27$

Choisissez la valeur de  $b_1$  :   (entier relatif impair,  $b_1$  peut être négatif et  $v_0$  est toujours positif)



Tests aléatoires pour les cycles : N :  pendant

Statistiques sur  $v_0$

Ajout des statistiques sur les transitions

Ajout des statistiques sur  $r_N$  (calculs plus longs)

Cycles trouvés ( $v_0 = 0$  est éliminé et si  $b_1 < 0$  alors  $v_0 = -b_1$  est omis aussi) :

Résultats complets pour N = 27 et  $b_1 = 1$

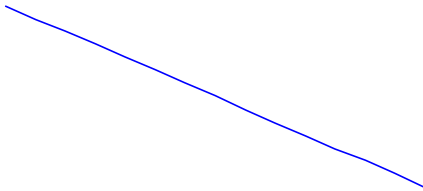
Liste des éléments de résultats :

1. N
2. Number of lists of transitions computed (for cycle)
3. Time for computations
4. Minimum value of  $v(0)$  and description : (list of transitions,  $v(0)$ ,  $v(N)$ )
5. Number of times, we get n for " $v = N - \text{NbBits}(v(0))$ " (starting from 0)
6. Average and deviation for v
7. Statistics on transitions
8. Number of times, we get n for " $r = \text{NbBits}(r_N)$ " (starting from 0)
9. Average and deviation for r

1. 27
2. 312455
3. 8.385 s
4. 251 : ("11011011111001111000101010",251,244)
5. 156040,78398,38861,19543,9806,4872,2481,1269,591,298,151,67,41,20,10,4,0,1,1,1

The number of tests = 312455 <  $2^{19}$  and  $\max(v) = 20$ . The distribution is not exactly as expected, but the difference is low. N = 27 is quite small too.

Graphics of  $\text{Ln}(re_k)$  for k less than first time  $r_k \leq 10$  :



Coefficient of correlation  $R \sim -0.9999622845169954$

k	$e_k$	$re_k$	$A_k$	$re_k < A_k$	$R_k$	$q_k$
0	0	312455				
1	156040	156415	157345	true	157349	1.007
2	78398	78017	78998	true	79474	1.017
3	38861	39156	39567	true	40310	1.032
4	19543	19613	19973	true	20567	1.053
5	9806	9807	10086	true	10582	1.084
6	4872	4935	5101	true	5509	1.128
7	2481	2454	2607	true	2917	1.195
8	1269	1185	1326	true	1581	1.295
9	591	594	661	true	---	---
10	298	296	345	true	---	---
11	151	145	182	true	---	---
12	67	78	96	true	---	---
13	41	37	56	true	---	---
14	20	17	30	true	---	---
15	10	7	16	true	---	---

16	4	3	8	true	---	---
17	0	3	4	true	---	---
18	1	2	4	true	---	---
19	1	1	3	true	---	---
20	1	0	2	true	---	---

6. 1.00099 and 1.41447

n	$t_n=0 \ \&\& \ d_n=0$	$t_n=0 \ \&\& \ d_n=1$	$t_n=0$	% $d_n=1$	$t_n=1 \ \&\& \ d_n=0$	$t_n=1 \ \&\& \ d_n=1$	$t_n=1$	% $d_n=1$
0	0	0	0	0	0	312455	312455	100
1	0	0	0	0	0	312455	312455	100
2	58040	0	58040	0	0	254415	254415	100
3	58040	0	58040	0	0	254415	254415	100
4	58040	0	58040	0	58040	196375	254415	77.18
5	69473	11433	80906	14.13	46607	184942	231549	79.87
6	58040	22866	80906	28.26	70348	161201	231549	69.61
7	58040	22866	80906	28.26	81781	149768	231549	64.68
8	49259	50211	99470	50.47	123909	89076	212985	41.82
9	49259	50211	99470	50.47	118605	94380	212985	44.31
10	59588	46182	105770	43.66	99718	106967	206685	51.75
11	56609	49161	105770	46.47	97887	108798	206685	52.63
12	51065	54705	105770	51.72	107061	99624	206685	48.2
13	61721	53654	115375	46.5	94723	102357	197080	51.93
14	61582	53793	115375	46.62	94794	102286	197080	51.9
15	56601	58774	115375	50.94	99839	97241	197080	49.34
16	63418	66237	129655	51.08	92788	90012	182800	49.24
17	64240	65415	129655	50.45	91354	91446	182800	50.02
18	68102	68280	136382	50.06	87698	88375	176073	50.19
19	68802	67580	136382	49.55	86831	89242	176073	50.68
20	68439	67943	136382	49.81	87862	88211	176073	50.09
21	76887	75585	152472	49.57	79492	80491	159983	50.31
22	76832	75640	152472	49.6	79685	80298	159983	50.19
23	75877	76595	152472	50.23	80471	79512	159983	49.7
24	101336	102169	203505	50.2	55005	53945	108950	49.51
25	101675	101830	203505	50.03	54313	54637	108950	50.14
26	156415	156040	312455	49.93	0	0	0	0

8. 281,154199,157974,1

9. 1.5047 and 0.50177

Le cas  $N = 27$  est représentatif de ce qu'il se passe dans les dernières étapes de  $k$  car à la base, on n'a déjà que 312455 listes à tester, ce qui est peu.

Les résultats obtenus pour  $N = 27$  sont vraiment très proches de la modélisation théorique statistique, sans même utiliser la majoration du nombre restant à 2 écart type.

On voit un coefficient de corrélation linéaire entre  $k$  et  $\text{Ln}(re_k)$  voisin de -0.99996, ce qui est excellent (même pour des valeurs de  $re_k$  jusqu'à 10, ce qui est plus faible que la convergence théorique du modèle qui se limite à 30 environ)

Pour les dernières valeurs de  $k$ , la décroissance est très mécanique, il n'y a pas vraiment de phénomène aléatoire.

---

Résultats partiels pour  $N = 40$  et  $b_1 = 1$

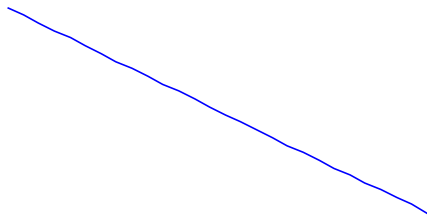
On se focalise ici sur la répartition des  $v_0$  (le résultat indexé par 5) :

On obtient :

5. 949744268,474866457,237419589,118721656,59361118,29681430,14840202,7419771,3709525,1855537,927725

The number of tests = 1899474678 <  $2^{31}$  and  $\max(v) = 34$ . The distribution is not exactly as expected, but the difference is low.  $N = 40$  is quite small too.

Graphics of  $\text{Ln}(re_k)$  for  $k$  less than first time  $r_k \leq 10$  :



Coefficient of correlation  $R \sim -0.9999822863394272$

k	$e_k$	$re_k$	$A_k$	$re_k < A_k$	$R_k$	$q_k$
0	0	1899474678				
1	949744268	949730410	949824504	true	949824508	1
2	474866457	474863953	474926840	true	474973899	1
3	237419589	237444364	237475559	true	237530546	1
4	118721656	118722708	118753000	true	118796107	1.001
5	59361118	59361590	59383145	true	59419863	1.001
6	29681430	29680160	29696204	true	29725360	1.002
7	14840202	14839958	14850975	true	14873597	1.002
8	7419771	7420187	7427683	true	7444524	1.003
9	3709525	3710662	3715541	true	3727732	1.005
10	1855537	1855125	1859183	true	1867740	1.007
11	927725	927400	930286	true	936617	1.01
12	463941	463459	465626	true	470257	1.014
13	231999	231460	233091	true	236514	1.02
14	115918	115542	116692	true	119243	1.029
15	57567	57975	58450	true	60326	1.041
16	28996	28979	29469	true	30668	1.058
17	14479	14500	14829	true	15698	1.083
18	7377	7123	7490	true	8114	1.12
19	3566	3557	3730	true	4252	1.174
20	1744	1813	1897	true	2272	1.254
21	930	883	991	true	---	---
22	436	447	500	true	---	---
23	211	236	265	true	---	---
24	110	126	148	true	---	---
25	63	63	85	true	---	---
26	31	32	47	true	---	---
27	18	14	27	true	---	---
28	8	6	14	true	---	---
29	4	2	7	true	---	---
30	1	1	3	true	---	---
31	0	1	2	true	---	---
32	0	1	2	true	---	---
33	0	1	2	true	---	---

34	1	0	2	true	---	---
----	---	---	---	------	-----	-----

En regardant ces résultats pour  $N = 40$ , on voit les nombres d'occurrences pour  $v_0$  qui sont à la fin "31,18,8,4,1,0,0,0,1" et il y a donc 1 valeur de  $v_0$  qui échappe à l'intervalle avec 3 bits de moins que ce qui est prévu théoriquement. Ainsi, l'écart est insignifiant.

## VII. Etude de la divergence vers l'infini

La méthode employée pour avoir la valeur minimale de  $v_0$  grâce à la répartition statistique des  $v_0$  est très robuste.

On va procéder de la même manière pour étudier une éventuelle divergence

- On va dénombrer ou du moins majorer le nombre de listes pour lesquelles  $v_n > v_0$  pour tout  $n$  ( $v_n < v_0$  pour  $v_0 < 0$ ). Pour rappel, démontrer le théorème est équivalent à identifier les cycles et à démontrer qu'il n'y a pas de divergence vers l'infini pour  $v$ , donc pour  $u$
- On éliminera les listes pour lesquelles, il y a d'éventuels cycles à partir de valeurs de  $v_0$  inférieures à la valeur minimale d'un cycle trivial
- On conclura avec la répartition statistique pour démontrer qu'il ne peut pas y avoir de divergence
- On vérifiera la cohérence avec les records de "vol en altitude"
- On détaillera les résultats de mon test complètement inutile de la suite pour  $v_0 < 2^{40}$  pour  $b_1 = 1$
- On ajoutera la possibilité de tester la suite

### 1. Le nombre $Up(N)$ de listes de transitions de longueur $N$ telles que, pour $v_n > v_0$ pour $n \leq N$ , est inférieur ou égal à $C_N^m$

On s'intéresse aux listes  $L$  de transitions de longueur  $N$  telles que, pour tout  $0 < n \leq N$ ,  $v_n > v_0$

( $v_n < v_0$  pour  $n \leq N$  si  $v_0 < 0$ ) car :

- Grâce au "Théorème 0" (paragraphe VI-2), elles caractérisent chacune une solution minimale  $v_0 < 2^N$  (bijection) et ce sont uniquement ces valeurs de  $v_0$  qu'il faut tester pour vérifier la suite par le calcul jusqu'à  $2^N$ . On est sûr de faire le minimum de calculs.
- On a alors aussi la répartition des  $v_0$ , élément nouveau pour le raisonnement. En effet, la probabilité que  $2^{N-(k+1)} \leq v_0 < 2^{N-k}$  est  $\frac{1}{2^k}$  et leur nombre tend donc vers  $\frac{Up(N)}{2^k}$ .
- Ces listes s'obtiennent facilement grâce à la liste de transitions frontière  $JGL(n)$ , déjà définie plus haut dans le document (parties IV et V).  
A chaque transition  $t_n$  (qui est indicée à partir de 0), il faut simplement que le nombre de transitions de "type 1" de  $L$  soit supérieur ou égal à celle de  $JGL(n+1)$  (qui est indicée à partir de 1).  
Par rapport à la partie précédente où il s'agissait de trouver des cycles, cette fois, la valeur de  $N$  ne correspond pas forcément à une "approximation" de  $X$  et le nombre de transitions de "type 1" n'est pas limité et peut donc valoir  $N$ .
- On peut facilement calculer le nombre exact de  $Up(N)$  mais une majoration (même grossière) permet un raisonnement statistique.

*Méthode 1* : On utilise une récursion comme pour les cycles, sans limite supérieure pour  $m$ , cela permettrait aussi de générer les listes de transitions et de réaliser le traitement. L'inconvénient, c'est que c'est lent.

JavaScript code not available in this document.

*Méthode 2* : On utilise la même méthode que pour les cycles, méthode avec mémorisation du nombre de listes  $Nb(n, m)$  pour une longueur  $n$  et un nombre de transitions de "type 1" donnés  $m$  (sans limite supérieure pour  $m$ ).

On a :

- $Nb(0, 0) = 1$
- $Nb(0, k) = 0$  pour  $1 \leq k \leq N$
- On construit les éléments pour  $n+1$  à partir de ceux de  $n$  de la façon suivante :
- $Nb(n+1, k) = 0$  pour  $0 \leq k \leq N$

- $Nb(n+1, k) += Nb(n, k-1)$  pour  $0 < k \leq N$  (ajout d'une transition de "type 1" toujours possible)
- $Nb(n+1, k) += Nb(n, k)$  pour  $k \geq m_{n+1}$  (ajout d'une transition de "type 0" possible)
- Le nombre de liste qui nous intéresse est  $Up(N) = \sum_{n=m_N}^N Nb(N, n)$

On ne gène pas les listes mais c'est beaucoup plus rapide.

On a le nombre exact mais c'est encore un résultat par récurrence, on n'a pas de formule directe.

Javascript code not available in this document.

Longueur N :

On obtient les résultats suivants :

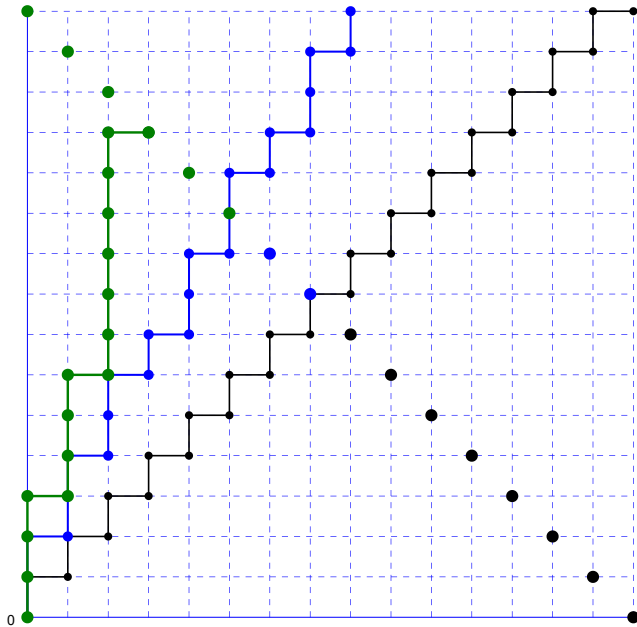
N	$Up(N)$
10	$\sim 2^6 \sim 2^{0.6 \times N} \sim 2^{N-4} = 64$
17	$\sim 2^{12.0458} \sim 2^{0.7086 \times N} \sim 2^{N-4.9542} = 4228$
20	$\sim 2^{14.7381} \sim 2^{0.7369 \times N} \sim 2^{N-5.2619} = 27328$
30	$\sim 2^{23.6064} \sim 2^{0.7869 \times N} \sim 2^{N-6.3936} = 12771274$
40	$\sim 2^{32.5761} \sim 2^{0.8144 \times N} \sim 2^{N-7.4239} = 6402835000$
50	$\sim 2^{41.764} \sim 2^{0.8353 \times N} \sim 2^{N-8.236} = 3734259929440$
60	$\sim 2^{50.977} \sim 2^{0.8496 \times N} \sim 2^{N-9.023} = 2216134944775156$
68	$\sim 2^{58.3377} \sim 2^{0.8579 \times N} \sim 2^{N-9.6623} = 364249198012174112$
69	$\sim 2^{59.2538} \sim 2^{0.8588 \times N} \sim 2^{N-9.7462} = 687342103066248112$
70	$\sim 2^{60.1068} \sim 2^{0.8587 \times N} \sim 2^{N-9.8932} = 1241503538986719152$
80	$\sim 2^{69.4443} \sim 2^{0.8681 \times N} \sim 2^{N-10.5557} = 803209913882910595105$
90	$\sim 2^{78.7507} \sim 2^{0.875 \times N} \sim 2^{N-11.2493} = 508520069189622659715764$
100	$\sim 2^{87.9674} \sim 2^{0.8797 \times N} \sim 2^{N-12.0326} = 302560669500543257546172187$

Méthode 3 : On majore le nombre de listes grâce au triangle de Catalan<sup>[5][6]</sup>

Comme pour les cycles, on peut faire un schéma en représentant en ordonnée le nombre de transitions de "type 1". Les listes de transitions sont alors des chemins avec des déplacements vers le haut ou vers la droite (vers le Nord ou vers l'Est). Les listes de transitions valables sont celles qui restent au dessus de la frontière JGL et qui se terminent au bout de N étapes aux points diagonaux (sur la droite d'équation  $y = N - X$ ) au dessus de celui correspondant à JGL(N).

Dans le schéma ci-dessous :

- La ligne bleue représente la frontière JGL
- La ligne verte correspond à une liste de transitions valable car elle est toujours au dessus de JGL
- La ligne noire correspond à la frontière pour le triangle de Catalan
- Les points verts sont les points d'arrivée des listes de transitions valables
- Les points bleus sont les points d'arrivée des listes de transitions qui ne sont pas valables mais qui le sont pour le triangle de Catalan
- Les points noirs sont les points d'arrivée des listes de transitions qui ne sont pas valables même pour le triangle de Catalan



Comme la frontière JGL est toujours "au dessus" de la diagonale, la contrainte est plus restrictive (peut-être en inversant les axes par rapport aux conventions)

Toujours est-il que  $Up(N) < \sum_{i=0}^{d_N} C(m_N+i, d_N-i)$  avec  $C(n, p)$ , les nombres du triangle de Catalan

On a la formule pour  $p > 0$  :  $C(n, p) = \binom{n+p}{n} - \binom{n+p}{n+1}$  et  $C(n, 0) = 1$

Ou pour  $p > 0$  :  $C(n, p) = C_{n+p}^n - C_{n+p}^{n+1}$  avec l'ancienne notation des combinaisons et  $C(n, 0) = 1$

Donc  $Up(N) < \sum_{i=0}^{d_N} C(m_N+i, d_N-i) = C(N, 0) + \sum_{i=0}^{d_N-1} C(m_N+i, d_N-i)$

$Up(N) < 1 + \sum_{i=0}^{d_N-1} (C_{m_N+i}^{m_N+i} - C_{m_N+i}^{m_N+i+1})$

On a un télescopage des termes et

$$Up(N) < 1 + C_{m_N}^{m_N} - C_N^N = C_{m_N}^{m_N}$$

D'après l'étude faite dans le paragraphe VI-4-1-3,  $Up(N) < 2^{0.95N}$ , pour  $N > 1000$ , ce qui est une majoration très large (à défaut d'une équivalence).

$$Up(N) < C_{m_N}^{m_N} < 2^{0.95N} \text{ pour } N > 1000.$$

## 2. Listes de transitions candidates à éliminer

Les listes de transitions pour lesquelles, il y a d'éventuels cycles à partir de valeurs de  $v_0$  inférieures à la valeur minimale d'un cycle trivial, font partie des listes dénombrées dans le paragraphe précédent.

Toutefois, leurs solutions  $v_0$  (minimales ou non) conduiront forcément à un cycle et ne représentent pas une possibilité de divergence vers l'infini. Il faut donc les éliminer.

Dans le cas de la suite de Syracuse standard, il n'y a qu'un seul cycle pour  $v$  (de longueur 2 constitué des valeurs 1 et 2) et les listes "10..." ou "01..." qui conduiraient au cycle pour  $v$  sont éliminées car la liste frontière JGL commence par "11", ce qui impose  $v_0 \geq 3$  pour toutes les listes de transitions candidates (pour lesquelles  $v_n \geq v_0$  pour tout  $n$ ). Il n'y a donc pas de problème.

Pour la même raison, le cycle trivial de longueur 2 pour  $v$  à partir de  $v_0 = b_1$ , pour  $v_0 > 0$  est éliminé avec la structure de JGL et la contrainte sur les liste.

Par contre, dans le cas  $v_0 < 0$ , le cycle trivial de longueur 1 avec  $v_0 = -b_1$  n'est pas éliminé car la liste de transitions n'est constituée que de 1 soit "1..."

Étudions maintenant ces différentes possibilités pour  $|b_1| < 1024$ , à partir des résultats de tests de la suite pour  $v_0 < 2^{N_0+B_1}$

On se limite aux cas où  $v_0$  et  $b_1$  sont premiers entre eux,  $\text{gcd}(v_0, b_1) = 1$

Il suffit de tester, pour chaque cycle trivial, si, à partir d'une valeur  $v$  inférieure à la valeur minimale du cycle  $v_0$ , on peut atteindre ce cycle car dans un tel cas, on a bien  $v_n > v$  pour tout  $n$ .

Le tableau liste tous ces cas.

Structure du tableau :

$b_1$	$v_0$ (valeur minimale du cycle)	$v$ (valeur à partir de laquelle on peut atteindre ce cycle)
-------	----------------------------------	--------------------------------------------------------------

Pour  $b_1 > 0$

[Résultats à la fin du document](#)

[Voir les résultats](#)

Pour  $b_1 < 0$

[Résultats à la fin du document](#)

[Voir les résultats](#)

On peut noter que les cas sont très rares et ne représentent que quelques listes au maximum (tout de même 71 listes pour  $b_1 = -311$ ) et uniquement pour certaines valeurs de  $b_1$ .

On peut aussi enlever toutes les listes éventuellement restantes qui ont pour solution la valeur minimale d'un cycle trivial... ce qui ne fait que quelques listes en plus

### 3. Conclusion sur l'existence de divergences vers l'infini

Dans le paragraphe VI-4-4, on a obtenu une majoration du nombre de  $v_0 < 2^{N-k}$  qui était très proche de  $\frac{1}{2^k}$  pour l'étude des cycles.

En utilisant exactement le même raisonnement statistique, cette fois-ci avec l'ensemble des listes de transitions de longueur  $N$  qui permettent d'avoir  $v_n \geq v_0$  pour tout  $n \leq N$ , on a :

Si  $2^{K+10} \leq Up(N) < 2^{K+11}$ , alors en tenant compte des  $K+12$  dernières étapes, on est sûr que le nombre de listes restantes est inférieur à 30.

De plus, comme on a la même majoration pour  $Cy(N)$  et  $Up(N)$  par  $C_N^m$ , on peut affirmer que :

**Toutes les valeurs de  $v_0$ , à partir desquelles on pourrait avoir  $v_n \geq v_0$  pour tout  $n \leq N$ , vérifient  $v_0 \geq 2^{0.04N}$  pour  $N > 1000$  et pour  $|b_1| < 1024$ .**

Faisons un simple raisonnement par l'absurde :

Supposons qu'il existe une valeur  $v_0$  pour laquelle la suite  $v$  diverge.

Alors, il existe une valeur  $p$  pour laquelle  $v_n \geq v_p$  pour tout  $n \geq p$  avec  $2^{N-1} \leq v_p < 2^N$

Cela permet de se placer dans le cas des listes de transitions étudiées précédemment pour une longueur supérieure à  $p$  dont  $v_p$  devrait toujours être la solution de l'une d'elle, quelque soit la longueur envisagée (cela permet d'éliminer les éléments pour  $0 < n < p$  tels que  $v_n < v_0$ ).

Il suffit de prendre  $N_1 = 10000 N$  (par exemple, inutile de chercher la valeur de  $k$  minimale avec  $N_1 = kN$ ).

On a alors la valeur minimale de toutes ces listes de transitions qui devrait être supérieure à  $2^{0.04N_1} = 2^{400N} > v_p$   
(avec une très grande marge)

Donc, on a une contradiction, c'est donc impossible

**Il n'y a pas de divergence vers l'infini pour  $|b_1| < 1024$ .**

#### 4. Cohérence avec les records de "vol en altitude"

On appelle N, longueur d'un "vol en altitude", le nombre de termes pour lesquels  $v_n > v_0$ .

Donc N est telle que pour tout  $0 < n < N$ ,  $v_n > v_0$  et  $v_N < v_0$

On parle de "record" pour  $v_0$  si pour toute valeur inférieure à  $v_0$ , le "vol en altitude" est inférieur à celui de  $v_0$

Dans le document d'Eric Roosendaal<sup>[7]</sup>, on peut trouver la liste des records.

On reprend cette liste et dans cette table, pour chaque record, on met le nombre  $v_0$  sous la forme  $2^n$  et on calcule la durée de vol N pour  $v$  (au lieu de  $u$ ) et si  $0.04N < n$  alors  $v_0$  est bien supérieure à la borne minimale  $2^{0.04N}$  (et donc c'est cohérent)

On calcule aussi  $Up(N) \sim 2^{N-p}$  et on voit que  $n$  est voisin de  $p$ , il y a donc  $p - n$  étapes de différence pour le record par rapport à une simple division par 2 du nombre de listes à chaque étape, ce qui confirme la modélisation et le caractère très mécanique et absolument pas aléatoire.

Index	$N_u$ for $u$	$v_0 = 2^n$	$n$	$N$ for $v$	$0.04N$	$0.04N < n$	$Up(N)$	$p$	$p - n$
34	1639	2602714556700227743	61.1747	1005	40.2	true	$\sim 2^{943.0839} \sim 2^{0.9384 \times N} \sim 2^{N-61.9161}$	61.9161	0.7414
33	1614	1236472189813512351	60.1009	990	39.6	true	$\sim 2^{928.9491} \sim 2^{0.9383 \times N} \sim 2^{N-61.0509}$	61.0509	0.95
32	1575	180352746940718527	57.3236	966	38.64	true	$\sim 2^{906.1832} \sim 2^{0.9381 \times N} \sim 2^{N-59.8168}$	59.8168	2.4932
31	1471	118303688851791519	56.7153	902	36.08	true	$\sim 2^{845.4672} \sim 2^{0.9373 \times N} \sim 2^{N-56.5328}$	56.5328	-0.1825
30	1445	1008932249296231	49.8418	886	35.44	true	$\sim 2^{830.2837} \sim 2^{0.9371 \times N} \sim 2^{N-55.7163}$	55.7163	5.8745
29	1187	739448869367967	49.3934	728	29.12	true	$\sim 2^{680.6457} \sim 2^{0.935 \times N} \sim 2^{N-47.3543}$	47.3543	-2.0391
28	1177	70665924117439	46.0061	722	28.88	true	$\sim 2^{675.0009} \sim 2^{0.9349 \times N} \sim 2^{N-46.9991}$	46.9991	0.993
27	1161	31835572457967	44.8557	712	28.48	true	$\sim 2^{665.4982} \sim 2^{0.9347 \times N} \sim 2^{N-46.5018}$	46.5018	1.6461
26	1122	13179928405231	43.5834	688	27.52	true	$\sim 2^{642.7422} \sim 2^{0.9342 \times N} \sim 2^{N-45.2578}$	45.2578	1.6744



25	988	2081751768559	40.9209	606	24.24	true	$\sim 2^{565.145} \sim$ $2^{0.9326 \times N} \sim 2^{N-40.855}$	40.855	-0.0659
24	897	898696369947	39.709	550	22	true	$\sim 2^{512.0933} \sim$ $2^{0.9311 \times N} \sim 2^{N-37.9067}$	37.9067	-1.8023
23	892	12235060455	33.5103	547	21.88	true	$\sim 2^{509.2836} \sim$ $2^{0.931 \times N} \sim 2^{N-37.7164}$	37.7164	4.2061
22	729	2788008987	31.3766	447	17.88	true	$\sim 2^{414.6802} \sim$ $2^{0.9277 \times N} \sim 2^{N-32.3198}$	32.3198	0.9432
21	706	1827397567	30.7671	433	17.32	true	$\sim 2^{401.4799} \sim$ $2^{0.9272 \times N} \sim 2^{N-31.5201}$	31.5201	0.753
20	649	1200991791	30.1616	398	15.92	true	$\sim 2^{368.3885} \sim$ $2^{0.9256 \times N} \sim 2^{N-29.6115}$	29.6115	-0.5501
19	644	217740015	27.698	395	15.8	true	$\sim 2^{365.5739} \sim$ $2^{0.9255 \times N} \sim 2^{N-29.4261}$	29.4261	1.7281
18	613	63728127	25.9254	376	15.04	true	$\sim 2^{347.6308} \sim$ $2^{0.9246 \times N} \sim 2^{N-28.3692}$	28.3692	2.4438
17	502	56924955	25.7626	308	12.32	true	$\sim 2^{283.4323} \sim$ $2^{0.9202 \times N} \sim 2^{N-24.5677}$	24.5677	-1.1949
16	486	26716671	24.6712	298	11.92	true	$\sim 2^{273.9535} \sim$ $2^{0.9193 \times N} \sim 2^{N-24.0465}$	24.0465	-0.6247
15	476	20638335	24.2988	292	11.68	true	$\sim 2^{268.3451} \sim$ $2^{0.919 \times N} \sim 2^{N-23.6549}$	23.6549	-0.6439
14	468	13421671	23.6781	287	11.48	true	$\sim 2^{263.5931} \sim$ $2^{0.9184 \times N} \sim 2^{N-23.4069}$	23.4069	-0.2712
13	401	8088063	22.9474	246	9.84	true	$\sim 2^{224.9755} \sim$ $2^{0.9145 \times N} \sim 2^{N-21.0245}$	21.0245	-1.9229
12	365	1126015	20.1028	224	8.96	true	$\sim 2^{204.2689} \sim$ $2^{0.9119 \times N} \sim 2^{N-19.7311}$	19.7311	-0.3717
11	298	1027431	19.9706	183	7.32	true	$\sim 2^{165.7531} \sim$ $2^{0.9058 \times N} \sim 2^{N-17.2469}$	17.2469	-2.7237
10	287	626331	19.2566	176	7.04	true	$\sim 2^{159.0993} \sim$ $2^{0.904 \times N} \sim 2^{N-16.9007}$	16.9007	-2.3559
9	282	381727	18.5422	173	6.92	true	$\sim 2^{156.314} \sim$ $2^{0.9035 \times N} \sim 2^{N-16.686}$	16.686	-1.8562
8	269	362343	18.467	165	6.6	true	$\sim 2^{148.7835} \sim$ $2^{0.9017 \times N} \sim 2^{N-}$	16.2165	-2.2505

								16.2165		
7	267	270271	18.044	164	6.56	true	$\sim 2^{147.9135} \sim 2^{0.9019 \times N} \sim 2^{N-16.0865}$	16.0865	-1.9575	
6	220	35655	15.1218	135	5.4	true	$\sim 2^{120.6796} \sim 2^{0.8939 \times N} \sim 2^{N-14.3204}$	14.3204	-0.8014	
5	171	10087	13.3002	105	4.2	true	$\sim 2^{92.6731} \sim 2^{0.8826 \times N} \sim 2^{N-12.3269}$	12.3269	-0.9733	
4	132	703	9.4574	81	3.24	true	$\sim 2^{70.2925} \sim 2^{0.8678 \times N} \sim 2^{N-10.7075}$	10.7075	1.2501	
3	96	27	4.7549	59	2.36	true	$\sim 2^{49.977} \sim 2^{0.8471 \times N} \sim 2^{N-9.023}$	9.023	4.2681	
2	11	7	2.8074	7	0.28	true	$\sim 2^{3.7004} \sim 2^{0.5286 \times N} \sim 2^{N-3.2996}$	3.2996	0.4922	
1	6	3	1.585	4	0.16	true	$\sim 2^{1.585} \sim 2^{0.3963 \times N} \sim 2^{N-2.415}$	2.415	0.83	

### 5. Ma propre vérification de la suite pour $n \leq 2^{40}$ avec $b_1 = 1$

Même si cela n'a aucun intérêt, avec mes propres moyens informatiques, j'ai pu tester la suite de Syracuse jusqu'à  $n \leq 2^{40} = 1099511627776$

Il suffit de tester 6402835000 listes de transitions (0.58% de  $2^{40}$ ) en 49778 secondes soit un peu moins de 14 heures (sans les statistiques complémentaires) avec un processeur Intel(R) Core(TM) i5-1035G1, dans Google Chrome "Version 119.0.6045.160 (Build officiel) (64 bits)", avec le programme en Javascript inclus dans ce fichier et on obtient le résultat final suivant.

La vérification se fait sur 1295 processus qui pourraient être lancés en parallèle sur autant d'ordinateurs (leur durée n'est pas vraiment équilibrée allant de 9 à 250 secondes pour une moyenne de l'ordre de 39 secondes).

Voici les résultats du test après avoir enlevé une visualisation et une modélisation du comportement des listes ayant le même nombre de transitions de "type 1" :

Global results for some parallel processes

n1 : first value of n such as  $v(N+n) < v(0)$

n2 : first value of n such as  $v(N+n) = 1$

1. N

2. Number of lists of transitions computed (above JGL(40))

3. Time for computations

4. Minimum value of  $v(0)$  and description : (list of transitions,  $v(0)$ ,  $v(N)$ , n1)

5. Number of times, we get n for " $v = N - NbBits(v(0))$ " (starting from 0)

6. Average and deviation for v

7. n1Max = Maximum number for n1

8. Description of a solution for n1Max : (list of transitions,  $v(0)$ ,  $v(N)$ , n1)

9. Average and deviation for n1

10. Number of times, we get n for n1 (starting from 0)

1. 40

2. 6402835000

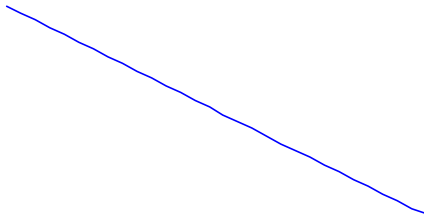
3. 49778.090999999986 s

4. 27 : ("1101111010110111010011101101111110",27,1822,19)

5. 3201415313,1600712335,800351093,400180065,200086844,100044150,50022007,25011669,12505491,625

The number of tests =  $6402835000 < 2^{33}$  and  $\max(v) = 36$ . The distribution is not exactly as expected, but the difference is low.  $N = 40$  is quite small too.

Graphics of  $\text{Ln}(re_k)$  for  $k$  less than first time  $r_k \leq 10$  :



Coefficient of correlation  $R \sim -0.999984102568291$

k	$e_k$	$re_k$	$A_k$	$re_k < A_k$	$R_k$	$q_k$
0	0	6402835000				
1	3201415313	3201419687	3201577535	true	3201577539	1
2	1600712335	1600707352	1600823005	true	1600901941	1
3	800351093	800356259	800433693	true	800531002	1
4	400180065	400176194	400234710	true	400322098	1
5	200086844	200089350	200128105	true	200201076	1.001
6	100044150	100045200	100072965	true	100128848	1.001
7	50022007	50023193	50042604	true	50084449	1.001
8	25011669	25011524	25025741	true	25056391	1.002
9	12505491	12506033	12515764	true	12538220	1.003
10	6252597	6253436	6260089	true	6276205	1.004
11	3127616	3125820	3131719	true	3143126	1.005
12	1564356	1561464	1566445	true	1575122	1.008
13	781178	780286	783231	true	790084	1.011
14	390764	389522	391909	true	396833	1.015
15	195203	194319	196009	true	199690	1.022
16	97093	97226	98041	true	100752	1.031
17	48690	48536	49236	true	51025	1.045
18	24612	23924	24708	true	25978	1.064
19	12160	11764	12271	true	13326	1.091
20	5846	5918	6098	true	6908	1.131
21	2944	2974	3112	true	3635	1.191
22	1508	1466	1596	true	1954	1.28
23	723	743	809	true	---	---
24	358	385	426	true	---	---
25	187	198	231	true	---	---
26	101	97	127	true	---	---
27	46	51	68	true	---	---
28	27	24	39	true	---	---
29	10	14	21	true	---	---
30	6	8	14	true	---	---
31	1	7	9	true	---	---
32	0	7	8	true	---	---
33	0	7	8	true	---	---
34	3	4	8	true	---	---
35	2	2	6	true	---	---
36	2	0	3	true	---	---

6. 1 and 1.4142

7. 510

8. ("110111111110101111101101101110101010",898696369947,168287090689819,510)  
 9. 18.67363 and 19.45287

Dans un autre test, en ayant coché "Ajout des statistiques sur les transitions", on obtient les résultats complémentaires :

n	t <sub>n</sub> =0 && d <sub>n</sub> =0	t <sub>n</sub> =0 && d <sub>n</sub> =1	t <sub>n</sub> =0	% d <sub>n</sub> =0	t <sub>n</sub> =1 && d <sub>n</sub> =0	t <sub>n</sub> =1 && d <sub>n</sub> =1	t <sub>n</sub> =1	% d <sub>n</sub> =1
0	0	0	0	0	0	6402835000	6402835000	0
1	0	0	0	0	0	6402835000	6402835000	0
2	1100914210	0	1100914210	100	0	5301920790	5301920790	0
3	1100914210	0	1100914210	100	0	5301920790	5301920790	0
4	1100914210	0	1100914210	100	1100914210	4201006580	5301920790	20.76
5	1298043035	197128825	1495171860	86.81	903785385	4003877755	4907663140	18.41
6	1100914210	394257650	1495171860	73.63	1413313120	3494350020	4907663140	28.79
7	1100914210	394257650	1495171860	73.63	1610441945	3297221195	4907663140	32.81
8	944159584	833631669	1777791253	53.1	2469110961	2155932786	4625043747	53.38
9	944159584	833631669	1777791253	53.1	2388362563	2236681184	4625043747	51.63
10	1116734963	745348718	1862083681	59.97	2002749808	2538001511	4540751319	44.1
11	1042500750	819582931	1862083681	55.98	2067140986	2473610333	4540751319	45.52
12	909215511	952868170	1862083681	48.82	2337924822	2202826497	4540751319	51.48
13	1105114649	865318617	1970433266	56.08	2024375455	2408026279	4432401734	45.67
14	1083888420	886544846	1970433266	55	2052470093	2379931641	4432401734	46.3
15	979301131	991132135	1970433266	49.69	2237514358	2194887376	4432401734	50.48
16	1015319573	1081236081	2096555654	48.42	2209784778	2096494568	4306279346	51.31
17	1035277679	1061277975	2096555654	49.37	2169707805	2136571541	4306279346	50.38
18	1072345116	1069003709	2141348825	50.07	2127098206	2134387969	4261486175	49.91
19	1083008126	1058340699	2141348825	50.57	2107199802	2154286373	4261486175	49.44
20	1068669506	1072679319	2141348825	49.9	2130918084	2130568091	4261486175	50
21	1114085103	1095388782	2209473885	50.42	2079044022	2114317093	4193361115	49.57
22	1106560886	1102912999	2209473885	50.08	2090302131	2103058984	4193361115	49.84
23	1110419363	1099054522	2209473885	50.25	2090751921	2102609194	4193361115	49.85
24	1150613143	1141891433	2292504576	50.19	2050398491	2059931933	4110330424	49.88
25	1147427588	1145076988	2292504576	50.05	2053742476	2056587948	4110330424	49.96
26	1147941766	1144562810	2292504576	50.07	2052871322	2057459102	4110330424	49.94
27	1204154994	1203020567	2407175561	50.02	1996970067	1998689372	3995659439	49.97
28	1203816053	1203359508	2407175561	50	1997427835	1998231604	3995659439	49.98
29	1227550009	1226736537	2454286546	50.01	1973660230	1974888224	3948548454	49.98
30	1227108369	1227178177	2454286546	49.99	1974351939	1974196515	3948548454	50
31	1227110080	1227176466	2454286546	49.99	1974327851	1974220603	3948548454	50
32	1271523744	1271812897	2543336641	49.99	1929903958	1929594401	3859498359	50
33	1271593007	1271743634	2543336641	49.99	1929872565	1929625794	3859498359	50
34	1271625565	1271711076	2543336641	49.99	1929768012	1929730347	3859498359	50
35	1351652483	1351659738	2703312221	49.99	1849770140	1849752639	3699522779	50
36	1351627230	1351684991	2703312221	49.99	1849785835	1849736944	3699522779	50
37	1395619940	1395679198	2791299138	49.99	1805788718	1805747144	3611535862	50
38	1395668625	1395630513	2791299138	50	1805755428	1805780434	3611535862	49.99
39	1395665096	1395634042	2791299138	50	1805754591	1805781271	3611535862	49.99

Tout est cohérent !

## 6. Test de la suite

Quand on coche les "Statistiques sur  $n_1$ ", ce qui est nécessaire pour tester la suite, on a aussi dans les résultats une visualisation et une modélisation du comportement des listes ayant le même nombre de transitions de "type 1". Cette approche statistique est moins satisfaisante que celle retenue dans ce document. Elle est laissée à titre indicatif.

Même si c'est complètement inutile, ce programme est conçu pour une exécution en parallèle en partitionnant les calculs, même s'ils sont faits sur le même ordinateur.

Choisissez la valeur de  $b_1$  :  OK (entier relatif impair)

Test de la suite pour  $v_0 < 2^N$ :

N :   Tous les tests  Tests aléatoires pendant

Statistiques sur  $v_0$  uniquement (calculs bien plus courts, pas de validation de la suite)

Statistiques sur  $n_1$  (nécessaire pour la validation de la suite)

Ajout des statistiques sur  $n_2$  (intéressant pour détecter des cycles si  $b_1 \neq 1$ )

Ajout des statistiques sur les transitions (pour  $n < N$ )

Ajout des statistiques sur  $r_N$  (calculs plus longs)

Cycles trouvés ( $v_0 = 0$  est éliminé et si  $b_1 < 0$  alors  $v_0 = -b_1$  est omis aussi) :

## VIII. Cas général, notamment $5n+1$

### 1. Cas $a_3$ impair

On considère la suite ainsi définie avec  $b_1$  impair :

$$\begin{cases} v_0 > 0 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{2} \text{ si } v_n \text{ est pair (transition de type 0)} \\ v_{n+1} = \frac{a_3 v_n + b_1}{2} \text{ si } v_n \text{ est impair (transition de type 1)} \end{cases}$$

#### 1. Cas $a_3 < 0$

On peut se ramener au cas  $a_3 > 0$  en changeant  $b_1$  aussi en son opposé

#### 2. Cas $a_3 = 3$

##### 1. Cas $|b_1| \leq 1024$

Ce cas est déjà examiné en détail dans ce document

##### 2. Cas $|b_1| > 1024$

Il n'y a pas d'obstacle théorique à démontrer un théorème similaire.

On devrait tout d'abord vérifier la suite jusqu'à  $2^{N_0 + B_1}$ .

Pour  $1024 < |b_1| < 2048$ , on trouve 737 comme longueur maximale d'un cycle pour  $v$  avec  $b_1 = 1699$  et  $v_0 = 23$ . Donc, le raisonnement reste valable avec  $N_0 = 17$

Même s'il est nécessaire d'augmenter  $N_0$  qui est égal à 17 initialement, il devient utopique de vérifier la suite pour  $|b_1| > 2^{51}$  avec les moyens informatiques actuels (en 2024), puisque l'on a fait qu'une seule vérification pour la suite de Syracuse standard jusqu'à  $2^{68}$  (ce qui d'ailleurs ne sert à rien pour la

preuve du théorème).

### 3. Cas $a_3 = 5$

On peut modifier uniquement ici la valeur de  $a_3$  :  3  5 et le nombre d'étapes maximum pour l'étude de la convergence (divergence possible pour  $a_3 = 5$ ) :

Remarque : Pour signaler que  $a_3 = 5$ , la couleur de fond du document est "gris clair". Tous les "Tests" sont opérationnels, seuls les résultats sont différents.

Quand on essaie de tester la suite, on s'aperçoit qu'il semble y avoir un problème car avec  $b_1 = 1$ , pour  $v_0 = 7$ , on n'a pas de cycle au bout de 10000 étapes, ce qui oriente vers une possible divergence.

Le nombre d'étapes maximum peut être abaissé à 450 après avoir constaté qu'il n'y avait pas de cycle de longueur supérieure à 7 pour  $b_1 = 1$

La valeur de  $b_1$  n'a pas vraiment d'importance ici, on prendra  $b_1 = 1$ , car seuls les cycles triviaux sont différents.

On trouve ces nombres de cas où il semble y avoir une divergence pour  $b_1 = 1$  et  $N_0 = 20$  :

Nombre maximum de transitions	Nombre de cas de non convergence
50	523009
100	520747
200	519433
400	519296
425	519296
450	519293
500	519293
600	519293
800	519293
1000	519293
2000	519293

On notera que le nombre semble être constant à partir d'un nombre maximum de transitions supérieur à 450.

Ce nombre n'est pas très conséquent car on fait  $\frac{2^{N_0}}{2} = 2^{19} = 524288$  tests seulement.

La construction de la frontière JGL est identique, avec des motifs. On s'aperçoit que le motif de longueur 339 semble le mieux adapté (même s'il apparaît moins que le motif de 1054 pour le cas  $a_3 = 3$ )

Le nombre de listes de transitions pour les cycles n'est pas majoré par le nombre de mots de Dyck car cette fois, c'est moins contraignant car  $X = \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}5 - \text{Ln}2}$  et  $\frac{X}{1+X} \approx 0.43 < \frac{1}{2}$

Toutefois, on a :

- Pour  $b_1 > 0$  et  $N = 10790$ ,  $C_y(N) = C_y(10790) \approx 2^{10790 - 170.51} = 2^{N - 170.51}$
- Pour  $b_1 < 0$  et  $N = 7804$ ,  $C_y(N) = C_y(7804) \approx 2^{7804 - 128.27} = 2^{N - 128.27}$

Il suffit de prendre  $N_0 = 20$  pour être assuré de ces valeurs respectives de longueur minimales de cycles.

Voici les résultats des  $\frac{2^{20}}{2} = 2^{19} = 524288$  tests pour  $b_1 = 1$  et  $N_0 = 20$ :

For the first time : more than 2000 steps are required to verify the conjecture for 7  
Continue without displaying other such values  
For 519293 values, the conjecture is not verified.

Values are :

7,9,11,21,23,25,29,31,35,37,39,41,45,47,49,53,55,57,59,61,63,67,69,71,73,75,77,79,81,85,87,89,91,93,95,99

$b_1$	$v_0$	Length	Values
1	1	5	1; 3; 8; 4; 2
1	13	7	13; 33; 83; 208; 104; 52; 26
1	17	7	17; 43; 108; 54; 27; 68; 34

Donc, pour prouver qu'il n'y a pas de cycles hormis les cycles triviaux (pour les valeurs de  $v_0 < 2^{N_0+B_1} = 2^{20+B_1}$  qui convergent), il n'y aurait pas de difficultés. Il suffit de reprendre la méthode pour  $a_3 = 3$ , on admet le résultat.

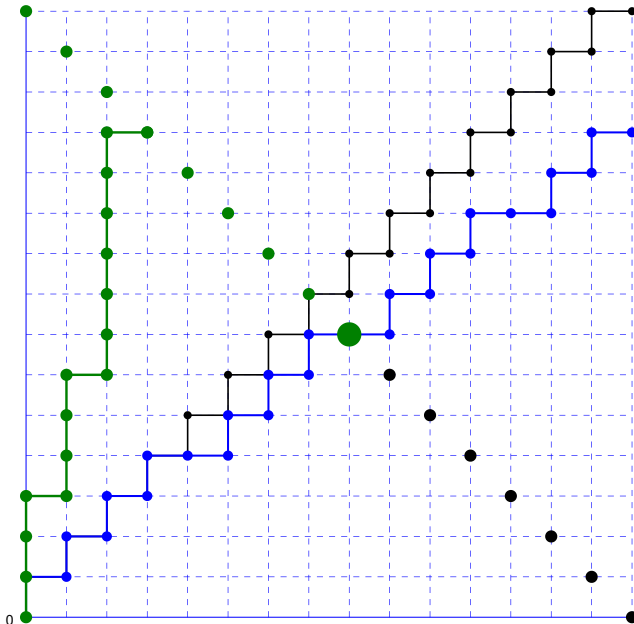
On va étudier la divergence vers l'infini (pour  $b_1 = 1$ ).

Pour commencer, et comme on l'avait fait pour  $a_3 = 3$ , on a une seule liste de transitions telle que l'on atteint un cycle à partir d'une valeur inférieure à la valeur minimale du cycle. Il s'agit de  $v_0 = 5$  et la liste de transitions correspondante.

Comme pour les cycles, la contrainte pour qu'une liste de transitions de longueur N soit telle que  $v_n \geq v_0$  pour tout  $n \leq N$  est moins forte que pour  $a_3 = 3$  et même pour le triangle de Catalan (frontière JGL sous la diagonale).

Dans le schéma ci-dessous :

- La ligne bleue représente la frontière JGL
- La ligne verte correspond à une liste de transitions valable car elle est toujours au dessus de JGL
- La ligne noire correspond à la frontière pour le triangle de Catalan
- Les points verts sont les points d'arrivée des listes de transitions valables
- Les points noirs sont les points d'arrivée des listes de transitions qui ne sont pas valables



On remarquera que l'on a toujours (indépendamment de la valeur de  $a_3$ ) :

- $Up(N+1) = 2Up(N)$  si  $t_N$  est de "type 0" dans JGL (ou  $JGL[N+1] = '0'$ ) pour  $N > 0$
- $Up(N+1) = 2Up(N) - Bo(N)$  si  $t_N$  est de "type 1" dans JGL (ou  $JGL[N+1] = '1'$ ) pour  $N > 0$  avec  $Bo(N)$ , le nombre de listes de transitions de longueur N, atteignant exactement la frontière JGL en N

Ainsi, tant que la frontière est "verticale" ( $t_N$  de "type 1"),  $Up(N) = 1$  et ensuite  $Up(N+1) > Up(N)$  dans

tous les cas, donc  $Up(N)$  est une fonction croissante, comme on aurait pu s'en douter en regardant les chemins possibles sur le schéma précédent.

Le programme précédent pour calculer  $Up(N)$  est fonctionnel mais cette implémentation est plus générale encore.

Dans les résultats  $p$  est tel que  $Up(N) = 2^{N-p}$

Voir/Masquer le code

Test pour la valeur maximale de N :  pour une pente de la frontière de

On obtient les résultats suivants avec  $a_3 = 5$  soit un "coefficient directeur" valant  $\frac{\ln 2}{\ln 5}$  (à ne pas prendre au sens strict de celui de droite mais d'accroissement par rapport à la longueur du chemin) :

N	p	$Up(N)$
1	1	$\sim 2^0 \sim 2^{0 \times N} \sim 2^{N-1}$
2	1	$\sim 2^1 \sim 2^{0.5 \times N} \sim 2^{N-1}$
3	1.415037	$\sim 2^{1.584963} \sim 2^{0.528321 \times N} \sim 2^{N-1.415037}$
4	1.415037	$\sim 2^{2.584963} \sim 2^{0.646241 \times N} \sim 2^{N-1.415037}$
5	1.678072	$\sim 2^{3.321928} \sim 2^{0.664386 \times N} \sim 2^{N-1.678072}$
6	1.678072	$\sim 2^{4.321928} \sim 2^{0.720321 \times N} \sim 2^{N-1.678072}$
7	1.870717	$\sim 2^{5.129283} \sim 2^{0.732755 \times N} \sim 2^{N-1.870717}$
8	1.870717	$\sim 2^{6.129283} \sim 2^{0.76616 \times N} \sim 2^{N-1.870717}$
9	1.870717	$\sim 2^{7.129283} \sim 2^{0.792143 \times N} \sim 2^{N-1.870717}$
10	1.944718	$\sim 2^{8.055282} \sim 2^{0.805528 \times N} \sim 2^{N-1.944718}$
20	2.170575	$\sim 2^{17.829425} \sim 2^{0.891471 \times N} \sim 2^{N-2.170575}$
30	2.2812	$\sim 2^{27.7188} \sim 2^{0.92396 \times N} \sim 2^{N-2.2812}$
40	2.349178	$\sim 2^{37.650822} \sim 2^{0.941271 \times N} \sim 2^{N-2.349178}$
50	2.387105	$\sim 2^{47.612895} \sim 2^{0.952258 \times N} \sim 2^{N-2.387105}$
60	2.410317	$\sim 2^{57.589683} \sim 2^{0.959828 \times N} \sim 2^{N-2.410317}$
70	2.433388	$\sim 2^{67.566612} \sim 2^{0.965237 \times N} \sim 2^{N-2.433388}$
80	2.448684	$\sim 2^{77.551316} \sim 2^{0.969391 \times N} \sim 2^{N-2.448684}$
90	2.45861	$\sim 2^{87.54139} \sim 2^{0.972682 \times N} \sim 2^{N-2.45861}$
100	2.469113	$\sim 2^{97.530887} \sim 2^{0.975309 \times N} \sim 2^{N-2.469113}$
200	2.499393	$\sim 2^{197.500607} \sim 2^{0.987503 \times N} \sim 2^{N-2.499393}$
300	2.504566	$\sim 2^{297.495434} \sim 2^{0.991651 \times N} \sim 2^{N-2.504566}$
400	2.505715	$\sim 2^{397.494285} \sim 2^{0.993736 \times N} \sim 2^{N-2.505715}$
500	2.506021	$\sim 2^{497.493979} \sim 2^{0.994988 \times N} \sim 2^{N-2.506021}$
600	2.506105	$\sim 2^{597.493895} \sim 2^{0.995823 \times N} \sim 2^{N-2.506105}$
700	2.50613	$\sim 2^{697.49387} \sim 2^{0.99642 \times N} \sim 2^{N-2.50613}$
800	2.506138	$\sim 2^{797.493862} \sim 2^{0.996867 \times N} \sim 2^{N-2.506138}$
900	2.50614	$\sim 2^{897.49386} \sim 2^{0.997215 \times N} \sim 2^{N-2.50614}$
1000	2.506141	$\sim 2^{997.493859} \sim 2^{0.997494 \times N} \sim 2^{N-2.506141}$
2000	2.506141	$\sim 2^{1997.493859} \sim 2^{0.998747 \times N} \sim 2^{N-2.506141}$
3000	2.506141	$\sim 2^{2997.493859} \sim 2^{0.999165 \times N} \sim 2^{N-2.506141}$
4000	2.506141	$\sim 2^{3997.493859} \sim 2^{0.999373 \times N} \sim 2^{N-2.506141}$



5000	2.506141	$\sim 2^{4997.493859} \sim 2^{0.999499 \times N} \sim 2^{N-2.506141}$
6000	2.506141	$\sim 2^{5997.493859} \sim 2^{0.999582 \times N} \sim 2^{N-2.506141}$
7000	2.506141	$\sim 2^{6997.493859} \sim 2^{0.999642 \times N} \sim 2^{N-2.506141}$
8000	2.506141	$\sim 2^{7997.493859} \sim 2^{0.999687 \times N} \sim 2^{N-2.506141}$
9000	2.506141	$\sim 2^{8997.493859} \sim 2^{0.999722 \times N} \sim 2^{N-2.506141}$
10000	2.506141	$\sim 2^{9997.493859} \sim 2^{0.999749 \times N} \sim 2^{N-2.506141}$
20000	2.506141	$\sim 2^{19997.493859} \sim 2^{0.999875 \times N} \sim 2^{N-2.506141}$
30000	2.506141	$\sim 2^{29997.493859} \sim 2^{0.999916 \times N} \sim 2^{N-2.506141}$
40000	2.506141	$\sim 2^{39997.493859} \sim 2^{0.999937 \times N} \sim 2^{N-2.506141}$
50000	2.506141	$\sim 2^{49997.493859} \sim 2^{0.99995 \times N} \sim 2^{N-2.506141}$

Rappelons que  $p$  est tel que  $Up(N) = 2^{N-p}$

C'est bien sûr impossible de conclure à partir de quelques valeurs mais il semblerait que  $p$  diverge quand le "coefficient directeur" de la frontière est supérieur à 0.50 et que  $p$  converge lorsque le "coefficient directeur" est inférieur à 0.48 (en prenant les chemins valables comme étant ceux "au dessus" de la frontière)

Même s'il existe de nombreuses variantes du triangle de Catalan, je n'ai ni la culture mathématique suffisante, ni aucun livre de référence et donc je ne sais pas si le cas d'une frontière quelconque a déjà été étudié pour avoir une expression formelle (si elle existe) de notre quantité recherchée, somme des nombres de possibilités d'atteindre des emplacements sur la diagonale opposée (points dans le schéma précédent).

Essayons de trouver une méthode de minoration de  $Up(N)$  plus simple pour prouver qu'il existe  $l$  telle que  $Up(N) > 2^{N-l}$  (pour tout  $N$  assez grand) car ensuite il sera facile de conclure pour la divergence grâce à la répartition des valeurs  $v_0$ .

D'après les résultats des tests précédents, si l'on a une convergence pour un "coefficient directeur" inférieur à 0.48 et que  $\frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}5} \approx 0.43$ , cela veut dire que l'on a une marge confortable pour choisir une frontière pour laquelle on peut minorer plus facilement  $Up(N)$ .

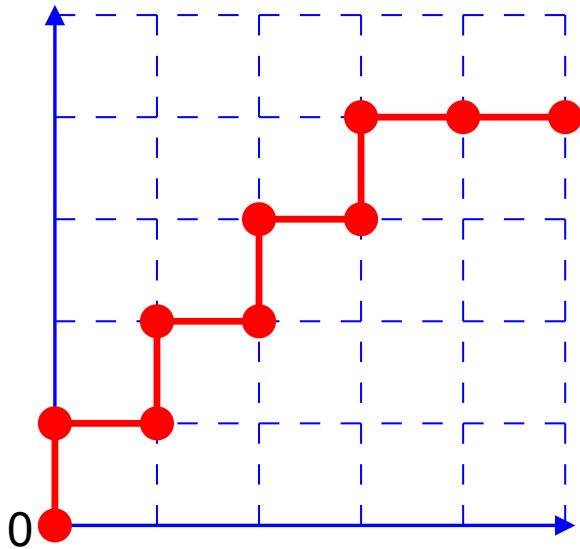
L'inconvénient de  $\frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}5}$  est qu'il n'est pas rationnel et même s'il y a des motifs dans la frontière, il ne se répètent pas rigoureusement à l'identique en s'enchaînant.

L'idée est d'approximer la frontière par un motif répétitif.

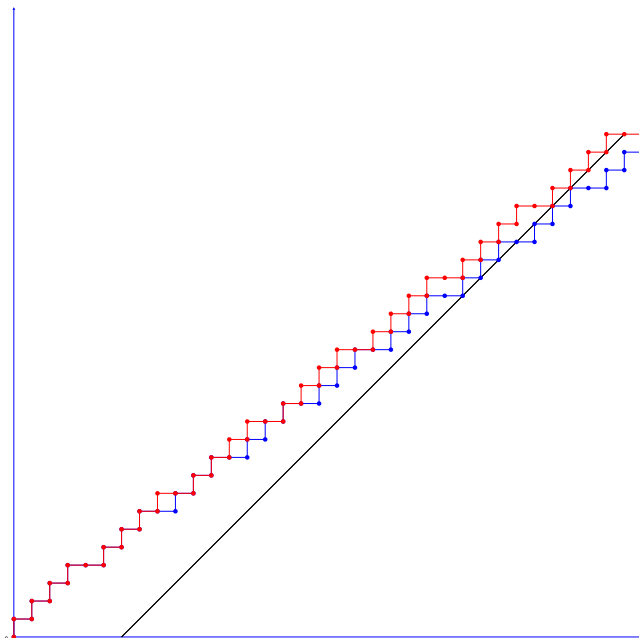
Pour avoir une minoration du nombre de chemins (ou listes de transitions), il suffit de prendre une approximation par excès de  $\frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}5}$ .

Cela a été fait dans les parties précédentes (voir le paragraphe IV-9 si l'on a bien coché  $a_3 = 5$  en début de ce paragraphe, couleur de fond gris clair pour le document).

On trouve l'"approximation"  $\frac{m}{N} = \frac{1}{2} = 0.5$  qui est trop grande car supérieure à 0.48, la suivante est  $\frac{4}{9} \approx 0.444...$  qui convient. L'avantage est que le motif est petit (rectangle 5 par 4) et que l'on va pouvoir faire les calculs exacts facilement.



Ce qui donne cette représentation avec la véritable frontière JGL en bleu et celle avec le motif en rouge (la ligne noire servira pour les trapèzes de Catalan) :



Soit  $U_N$  le nombre de listes de transitions de longueur  $N$  au dessus de la frontière avec le motif précédent (rectangle  $4 \times 5$  ou "coefficient directeur" de la frontière  $\frac{4}{9}$ ).

Intéressons nous à la suite extraite,  $U_{9k}$ , qui correspond au motif

Si, pour  $k > k_0$ , on a  $U_{9(k+1)} > 2^{9-c_k} U_{9k}$  et  $U_{9k_0} = 2^{9k_0-l_0}$

Alors pour  $t > k_0$ ,  $U_{9t} > \prod_{k=k_0}^{t-1} 2^{9-c_k} U_{9k_0} = 2^{\left[9(t-k_0) - \sum_{k=k_0}^{t-1} c_k\right]} U_{9k_0} = 2^{\left[9(t-k_0) - \sum_{k=k_0}^{t-1} c_k\right]} \times 2^{9k_0-l_0} = 2^{9t-g(t)}$

avec  $g(t) = l_0 + \sum_{k=k_0}^{t-1} c_k$

Si  $g(t)$  avait une limite  $l$  quand  $t$  tend vers l'infini, alors on aurait  $U_{9k} > 2^{9k-l}$  pour  $k > k_0$  assez grand

D'autre part, on a  $U_N < U_p(N)$ , alors pour  $k > k_0$  assez grand,  $U_p(9k) > 2^{9k-l}$

Exprimons  $U_{9(k+1)}$  à partir de  $U_{9k}$  :

Pour simplifier, on note  $A_{k,n}$ , le nombre de chemins sur la frontière (avec le motif) au point de coordonnées  $(5k+n, 4k+n)$

Avec le motif, on a les relations très simples suivantes :

$$U_{9k+1} = 2U_{9k} - A_{k,0}$$

$$U_{9k+2} = 2U_{9k+1} = 2^2U_{9k} - 2A_{k,0}$$

$$U_{9k+3} = 2U_{9k+2} - A_{k,1} = 2^3U_{9k} - 4A_{k,0} - A_{k,1}$$

$$U_{9k+4} = 2U_{9k+3} = 2^4U_{9k} - 8A_{k,0} - 2A_{k,1}$$

$$U_{9k+5} = 2U_{9k+4} - A_{k,2} = 2^5U_{9k} - 16A_{k,0} - 4A_{k,1} - A_{k,2}$$

$$U_{9k+6} = 2U_{9k+5} = 2^6U_{9k} - 32A_{k,0} - 8A_{k,1} - 2A_{k,2}$$

$$U_{9k+7} = 2U_{9k+6} - A_{k,3} = 2^7U_{9k} - 64A_{k,0} - 16A_{k,1} - 4A_{k,2} - A_{k,3}$$

$$U_{9k+8} = 2U_{9k+7} = 2^8U_{9k} - 128A_{k,0} - 32A_{k,1} - 8A_{k,2} - 2A_{k,3}$$

$$U_{9(k+1)} = U_{9k+9} = 2U_{9k+8} = 2^9U_{9k} - 256A_{k,0} - 64A_{k,1} - 16A_{k,2} - 4A_{k,3}$$

Comme  $A_{k,0} \leq A_{k,1} \leq A_{k,2} \leq A_{k,3}$  alors on a une minoration très large

$$U_{9(k+1)} \geq 2^9U_{9k} - (256 + 64 + 16 + 4)A_{k,3} = 2^9U_{9k} - 340A_{k,3}$$

Exprimons la quantité  $e_k$  en posant  $2^9U_{9k} - 340A_{k,3} = 2^{9-e_k}U_{9k}$

$$\text{Ainsi, } 2^9U_{9k} \left( 1 - \frac{340A_{k,3}}{2^9U_{9k}} \right) = 2^9U_{9k} \times 2^{-e_k}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{340A_{k,3}}{2^9U_{9k}} = 2^{-e_k}$$

$$\Leftrightarrow \text{Ln} \left( 1 - \frac{340A_{k,3}}{2^9U_{9k}} \right) = -e_k \text{Ln}2 \text{ si } \frac{340A_{k,3}}{2^9U_{9k}} < 1 \text{ ce qui sera justifié ensuite}$$

En utilisant l'équivalent  $\text{Ln}(1+u) = u$  quand  $u$  tend vers 0

On a, si  $\frac{340A_{k,3}}{2^9U_{9k}}$  tend vers 0, ce qui sera justifié ensuite :

$$e_k = \frac{340A_{k,3}}{\text{Ln}2 \times 2^9U_{9k}} \approx \frac{0.958A_{k,3}}{U_{9k}} < \frac{A_{k,3}}{U_{9k}}$$

On cherche à majorer  $e_k$  donc on majore  $A_{k,3}$  puis on minore  $U_{9k}$

Majorons  $A_{k,3}$  :

$A_{k,3}$  est aussi le nombre de chemins au point de coordonnées  $(5k+n+1, 4k+n)$ , puisqu'en augmentant la longueur de 1, on ne peut aller que vers le haut ou la droite (pour rester au dessus de la frontière). Donc, on venait forcément de la gauche, du point  $(5k+n, 4k+n)$ , ce qui correspond à  $A_{k,3}$

En utilisant la formule du trapèze de Catalan<sup>[6]</sup>, comme la frontière du motif est au dessus de la diagonale passant par  $(5k+n+1, 4k+n)$  (ligne noire dans le schéma précédent), on peut minorer  $A_{k,3}$  par :

$$A_{k,3} < C_{9k+6}^{5k+3} - C_{9k+6}^{5k+3-(k+1)} = C_{9k+6}^{5k+3} - C_{9k+6}^{4k+2}$$

En fait, certainement à cause de la forme du motif (qui diffère de la diagonale juste à la dernière étape), il semblerait que, sans que cela soit une démonstration (même si elle l'on peut peut-être l'adapter pour tenir compte de cette étape supplémentaire) :

$A_{k,3} = \frac{1}{k+1} (C_{9k+6}^{5k+3} - C_{9k+6}^{4k+2})$ , les premières valeurs étant  $A_{0,3} = 5$ ,  $A_{1,3} = 715$ ,  $A_{2,3} = 178296$ , l'égalité est vérifiée pour  $k \leq 1000$

De toute façon, prenons comme majoration très large (issue de la formule des trapèzes), en négligeant le second terme pourtant très grand :

$$A_{k,3} < C_{9k+6}^{5k+3} = \frac{(9k+6)!}{(4k+3)!(5k+3)!} \text{ et calculons un équivalent de } C_{9k+6}^{5k+3} \text{ pour } k \text{ assez grand avec}$$

l'approximation  $\text{Ln}(n!) \approx n \text{Ln}(n) - n$ .

$$\text{Ln}(A_{k,3}) < (9k+6)\text{Ln}(9k+6) - (9k+6) - (4k+3)\text{Ln}(4k+3) + 4k+3 - (5k+3)\text{Ln}(5k+3) + 5k+3$$

pour  $k \geq 100$

$$\text{Ln}(A_{k,3}) < (9k+6)\text{Ln}(9k+6) - (4k+3)\text{Ln}(4k+3) - (5k+3)\text{Ln}(5k+3) \text{ après simplifications}$$

En utilisant  $\text{Ln}(9k+6) \approx \text{Ln}(9k)$ ,  $\text{Ln}(4k+3) \approx \text{Ln}(4k)$  et  $\text{Ln}(5k+3) \approx \text{Ln}(5k)$ , puis

$$\text{Ln}(ab) = \text{Ln}(a) + \text{Ln}(b)$$

$$\text{Ln}(A_{k,3}) < (9k+6)\text{Ln}(9k) - (4k+3)\text{Ln}(4k) - (5k+3)\text{Ln}(5k)$$

$$\text{Ln}(A_{k,3}) < (9k+6)\text{Ln}(9) - (4k+3)\text{Ln}(4) - (5k+3)\text{Ln}(5) \text{ après simplifications}$$

$$\text{Ln}(A_{k,3}) < (9\text{Ln}(9) - 4\text{Ln}(4) - 5\text{Ln}(5))k + 6\text{Ln}(9) - 3\text{Ln}(4) - 3\text{Ln}(5) \approx 6.183k + 4.2$$

$$A_{k,3} < e^{6.183k + 4.2} = 2^{(6.183k + 4.2)/\text{Ln}2} = 2^{8.921k + 6.06}$$

Minorons  $U_{9k}$  :

La frontière avec le motif est en dessous de la diagonale (car  $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ ) donc  $U_{9k}$  est supérieur au nombre de chemins au dessus de la diagonale (je crois vraiment que j'inverse les conventions d'usage mais c'est lié à  $\frac{3^m}{2^N} > 1$ )

En faisant le même raisonnement que dans le paragraphe VII-1, on trouve facilement que  $U_{9k} > C_{9k}^{9k/2}$  pour  $k$  pair.

En appliquant la formule de Stirling pour  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , on trouve :

$$U_{9k} > \frac{(9k)!}{\left(\frac{9k}{2}\right)!} \approx \frac{\sqrt{2\pi \times 9k} \left(\frac{9k}{e}\right)^{9k}}{\pi \times 9k \left(\frac{9k}{2e}\right)^{9k}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9\pi k}} \times 2^{9k} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9\pi}} \times 2^{9k - \text{Ln}(k)/(2\text{Ln}2)}$$

$$U_{9k} > 2^{9k - \text{Ln}(k)/(2\text{Ln}2)}$$

En conclusion, on peut revenir à  $e_k$  car les hypothèses sont justifiées pour l'équivalent de  $\text{Ln}(1+u) = u$  :

$e_k < \frac{A_{k,3}}{U_{9k}} < 2^{8.921k + 6.06 - 9k + \text{Ln}(k)/(2\text{Ln}2)} \approx 2^{-0.079k}$ , suite géométrique de raison  $2^{-0.079} = 0.947 < 1$  donc la série converge et la fonction  $g(9k)$  a une limite.

Pour résumer, en prenant  $k_0 = 1000$ , on a  $l_0 = 2.69258223$  et  $\sum_{k=k_0}^{+\infty} e_k = \frac{e_{k_0}}{1-q} = \frac{2^{-79}}{1-0.947} \approx 0$ .

Donc  $Up(9t) > U_{9t} > 2^{9t-l_0} = 2^{9t-2.693}$ , ce qui est cohérent avec le tableau de résultats qui permet d'imaginer une valeur proche de  $l = 2.506141$

Compte tenu des relations précédentes qui lient  $U_{9k+i}$  à  $U_{9k}$  pour  $0 < i < 9$ , qui n'affectent pas la 10ème décimale de  $l$  pour  $k > 1000$ , alors  $U_N > 2^{N-2.7}$  pour tout  $N > 9000$  (on peut vérifier que c'est vrai aussi pour  $N \leq 9000$ ).

Et finalement :  **$Up(N) > 2^{N-2.7}$  pour tout  $N$ .**

On va employer la méthode précédente (comme dans le cas  $a_3 = 3$ , détaillé précédemment au paragraphe VI-4-3) concernant la répartition des  $v_0$  solutions des listes de transitions, mais cette fois en minorant le nombre de listes restantes. C'est d'ailleurs en voulant tester la robustesse de la méthode, que le cas  $a_3 = 5$  a été envisagé.

A première vue, en simplifiant le processus, en divisant par 2 à chaque fois, on pourrait avoir la valeur minimale de  $v_0$  sur 3 bits, comme  $v_0 = 7$ .

De manière plus rigoureuse en posant  $v_0 = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \times 2^n < 2^N$  :

On peut voir  $d_{N-1} = 1$  comme une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = \frac{1}{2}$ , paramètre optimal pour l'application des résultats statistiques.

Pour la dernière transition :

Si on considère  $X_n$ , le nombre de fois que  $d_{N-1} = 1$  (pour la transition  $N-1$ ) pour toutes les  $n = Up(N)$

listes de transitions, c'est alors une loi binomiale et  $Z_n = \frac{X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{p(1-p)n}} = \frac{X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})n}} = \frac{X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$

converge vers la loi normale centrée et réduite (pour  $n > 30$  car  $p = \frac{1}{2}$ ).

De plus, on a  $P(Z_n \geq -4) = P(Z_n \leq 4) > 0.9999$  (puisque dans les tables de la loi normale centrée réduite, la valeur est 1.0000)

On peut considérer que l'on est dans ce cas pour minorer le nombre de  $v_0$  restants, c'est-à-dire le nombre de  $v_0 < 2^{N-1}$  pour les listes de transitions candidates. Si tel n'était pas le cas, ce n'est pas bien problématique puisque l'on va enchaîner le même raisonnement pour les transitions précédentes.

$$\text{Or } Z_n \geq -4 \Leftrightarrow X_n > \frac{n}{2} - 4\sqrt{\frac{n}{4}} = \frac{n}{2} - 2\sqrt{n} = \frac{n}{2}(1 - 4n^{-1/2})$$

Notons  $A_1$  ce minorant de  $X_n$  et  $A_0 = n$  le nombre initial de listes candidates.

Si  $n > 2^{10}$  alors on peut toujours utiliser la convergence vers la loi normale (car la limite d'utilisation est proche de  $n > 2^5$ ) et  $u = 4n^{-1/2} < 2^{-3}$

L'inégalité  $1-u < e^{-u}$  ne permet pas d'avoir une minoration mais  $1-u > 1 - \frac{3}{2}u$ .

On pourrait minorer  $1-u$  par  $e^{-3u/2}$  si  $f(u) = 1-u - e^{-3u/2} > 0$  pour  $0 < u < 2^{-3}$ , l'intervalle qui nous intéresse.

Etudions rapidement le signe de  $f$  :

$$f'(u) = -1 + \frac{3}{2}e^{-3u/2} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-3u/2} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{3}{2}u \geq \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow u \leq -\frac{2}{3}(\ln 2 - \ln 3) \approx 0.27 > 2^{-3}$$

Comme  $f(0) = 0, f(u) \geq 0$  sur  $[0, 2^{-3}]$  et donc, on peut utiliser la minoration :

$$1 - u > e^{-3u/2}$$

$A_1 = \frac{n}{2}(1 - u) > \frac{n}{2}e^{-3u/2} = \frac{n}{2}e^{-4n^{-1/2} \times 3/2} = \frac{n}{2}e^{-6n^{-1/2}} = R_1$ , le minorant en utilisant l'exponentielle qui permet en enchaînement plus facile

On peut reprendre exactement le même raisonnement avec la transition  $N-2$  avec le même formalisme, tant que le nombre de listes restantes est suffisant.

$$\text{On a } R_2 \geq \frac{R_1}{2}e^{-6R_1^{-1/2}}$$

$$\text{Or } R_1^{-1/2} = \left(\frac{n}{2}e^{-6n^{-1/2}}\right)^{-1/2} = \left(\frac{n}{2}\right)^{-1/2}e^{3n^{-1/2}} > \left(\frac{n}{2}\right)^{-1/2} \text{ car } 3n^{-1/2} > 0$$

$$\text{Donc } R_2 \geq \frac{n}{4}e^{-6n^{-1/2}}e^{-6\left(\frac{n}{2}\right)^{-1/2}} = \frac{n}{4}e^{-6n^{-1/2}}e^{-6n^{-1/2}\sqrt{2}} = \frac{n}{4}e^{-6n^{-1/2}(1+\sqrt{2})}$$

En recommençant avec le même formalisme pour  $d_{N-k}$ , tant que l'on peut utiliser la convergence vers la loi normale, on a :

$$R_k \geq \frac{n}{2^k}e^{-6n^{-1/2}S_k} \text{ avec } S_k = \sum_{i=1}^k \sqrt{2}^{(i-1)} = \frac{\sqrt{2}^k - 1}{\sqrt{2} - 1} < \frac{\sqrt{2}^k}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}^k}{\sqrt{2} - 1}$$

On peut démontrer ce résultat par récurrence, la formule étant vérifiée pour  $k = 1$  et  $k = 2$ .

Si l'on suppose qu'elle est vraie pour  $k$ , on montre qu'elle est vraie pour  $k + 1$

$$R_{k+1} \geq \frac{R_k}{2}e^{-6R_k^{-1/2}}$$

$$\text{Or } R_k^{-1/2} = \left(\frac{n}{2^k}e^{-6n^{-1/2}S_k}\right)^{-1/2} = \left(\frac{n}{2^k}\right)^{-1/2}e^{3n^{-1/2}S_k} > \left(\frac{n}{2^k}\right)^{-1/2} = n^{-1/2}\sqrt{2}^k \text{ car } 3n^{-1/2}S_k > 0$$

$$\text{Donc } R_{k+1} \geq \frac{n}{2^{k+1}}e^{-6n^{-1/2}S_k}e^{-6n^{-1/2}\sqrt{2}^k} = \frac{n}{2^{k+1}}e^{-6n^{-1/2}S_{k+1}}, \text{ la propriété est vérifiée}$$

On peut améliorer un peu l'écriture de  $R_k$  avec la dernière majoration de  $S_k$

$$R_k \geq \frac{n}{2^k}e^{-6\sqrt{2}^k / ((\sqrt{2}-1)^{\sqrt{n}})}$$

Soit  $K$  tel que  $2^{K+17} \leq n \leq 2^{K+18}$ , on minore  $n$  par une puissance de 2.

On est assuré que  $R_K > 2^{10}$  donc on peut utiliser la formule liée à la convergence vers la loi normale.

$$R_K \geq \frac{n}{2^K}e^{-6\sqrt{2}^K / ((\sqrt{2}-1)^{\sqrt{2^{K+17}}})} = \frac{n}{2^K}e^{-6/(2^{8\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1))} = \frac{n}{2^K}e^{-3/(2^7(2-\sqrt{2}))} \approx$$

$$0.96 \times \frac{n}{2^K} > \frac{1}{2} \times \frac{n}{2^K} > \frac{2^{K+17}}{2^{K+1}} = 2^{16} = 65536$$

C'est à dire, que lorsque l'on a pris en compte les  $K$  dernières transitions, l'erreur relative maximale est de 4% par rapport à la valeur approchée  $\frac{n}{2^K}$ , ce qui fait que l'erreur est de moins d'une "étape" !

On peut dire, en analysant les  $K$  dernières transitions, que le nombre de valeurs de  $v_0 < 2^{N-K}$  est supérieur à 65536.

Mais on vient de prouver que, pour tout  $N$ ,  $Up(N) = n = 2^{N-1} \approx 2^{N-2.7} > 2^{N-3}$  dans le cas  $a_3 = 5$

Comme on a posé  $K$  tel que :  $2^{K+17} \leq n \leq 2^{K+18}$

On a donc,  $K + 17 = N - 3$  et donc  $N - K = 20$ , ce qui signifie que le nombre de solutions  $v_0 < 2^{20}$  est supérieur à  $65536 = 2^{16}$  pour tout  $N$ .

Pour  $N \geq 20$ , soit  $E_N$ , l'ensemble des solutions  $v_0 < 2^{20} \leq 2^N$  minimales pour l'ensemble des listes de transitions de longueur  $N$  telles que  $0 < n \leq N$ , on a  $v_n \geq v_0$  (car on est dans le cas  $b_1 = 1$  ou  $v_0 > 0$ )  
Le cardinal de  $E_N$  est supérieur à  $2^{16}$  et inférieur à  $2^N$

Pour tout  $N > P$ , on a  $E_N \subset E_P$ , tout simplement car la condition est plus restrictive pour  $N > P$ .

On considère  $N_1 \geq 20$ , fixé, soit par exemple  $N_1 = 20$

Montrons par l'absurde, qu'il existe au moins une valeur  $v_0 \in E_{N_1}$ , pour laquelle il existe une infinité de valeurs de  $N$  pour lesquelles  $v_0 \in E_N$  :

Supposons que pour tout élément  $e$  de  $E_{N_1}$ ,  $e$  appartient à un nombre fini d'ensembles  $E_N$  pour des valeurs de  $N$  distinctes (ce qui équivaut à dire que  $e$  atteint une cycle trivial), alors, il existe  $M_e$ , le maximum de  $N$  tel que  $e \in E_N$ . Comme le cardinal de  $E_{N_1}$  est fini (inférieur à  $2^{20}$ ), il existe alors  $M_{E_1}$ , le maximum de tous les  $M_e$  pour  $e$  appartenant à  $E_{N_1}$

Si on considère  $N = M_{E_1} + 1$ , alors, pour chaque valeur  $e$  de  $E_{N_1}$ , on a  $v_{M_{E_1}+1} < e$ , et donc  $e \notin E_{M_{E_1}+1}$ .

Or, comme on a forcément  $E_{M_{E_1}+1} \subset E_{N_1}$ , alors  $E_{M_{E_1}+1} = \emptyset$ , ce qui contredit que le cardinal de  $E_{M_{E_1}+1}$  est nécessairement supérieur à  $2^{16}$ , ce qui termine la démonstration.

Soit  $v_0 \in E_{N_1}$ , tel que  $v_0$  appartient à une infinité d'ensembles  $E_N$ , alors on n'a pas de cycle à partir de cette valeur  $v_0$  (pour être précis, il faudrait enlever les quelques valeurs de  $v_0$  qui atteignent un cycle trivial avec  $v_0$  inférieur à la valeur minimale du cycle trivial. Ces cas sont rares et il n'y en a pas dans le cas  $b_1 = 1$ ) et donc pour tout  $N$  tel que  $v_0 \in E_N$ ,  $v_N$  est différent des valeurs  $v_n$  pour  $0 \leq n < N$  et tel que  $v_0 \in E_n$   
Montrons par l'absurde que  $v_n$  diverge vers l'infini :

Supposons le contraire, alors il existerait un majorant  $M$  tel que, pour tout  $n$ ,  $v_n < M$ . Mais, si l'on considère l'ensemble infini de valeurs de  $N$  telles que  $v_0 \in E_N$ , comme les valeurs de  $v_N$  sont distinctes (pas de cycle à partir de  $v_0$ ), alors le nombre fini de valeurs possibles  $M - v_0$  donne la contradiction.

Peut-être que la valeur  $v_0 = 7$  est l'une d'elles ?

**Pour  $a_3 = 5$  et  $b_1 = 1$ , il existe au moins une valeur  $v_0$  à partir de laquelle la suite  $v$  ( $u$  aussi) diverge**

On peut démontrer le même résultat pour toute valeur de  $b_1$ , seuls les cycles triviaux changent.

#### 4. Cas $a_3 > 5$

Si l'on admet que la suite diverge pour une valeur  $v_0$  avec  $a_3 = 5$  et  $b_1 = 1$ , alors il y aura forcément une divergence pour  $a_3 > 5$ , la frontière étant encore moins contraignante pour les listes de transitions permettant d'avoir une éventuelle divergence.

#### 2. Cas $a_3$ pair

On considère la suite ainsi définie avec  $b_1$  pair :

$$\begin{cases} v_0 > 0 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{2} \text{ si } v_n \text{ est pair (transition de type 0)} \\ v_{n+1} = \frac{a_3 v_n + b_1}{2} \text{ si } v_n \text{ est impair (transition de type 1)} \end{cases}$$

### 1. Cas $a_3 < 0$

On peut se ramener au cas  $a_3 > 0$  en changeant  $b_1$  aussi en son opposé

### 2. Cas $a_3 = 2$ ou $a_3 = 4$ ou $a_3 = 6$

Alors  $a_3 = 2a$  avec  $1 \leq a \leq 3$

Comme  $b_1 = 2k$  est pair, alors la transition de "type 1" devient  $v_{n+1} = av_n + k$

si  $v_n$  est impair (transition de type 1)

La croissance est tout au plus égale à celle de la suite de Syracuse standard, donc on devrait avoir le même type de théorème avec des "cycles triviaux" et pas de divergence.

### 3. Cas $a_3 = 8$

Comme  $b_1 = 2k$  est pair, alors la transition de "type 1" devient  $v_{n+1} = 4v_n + k$

si  $v_n$  est impair (transition de type 1)

La frontière JGL serait la "diagonale" (car la proportion de transitions de "type 1" est  $\frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}(4)} = \frac{1}{2}$ ), qui nous a servi dans le cas de la suite de Syracuse standard pour les majorations des nombres de listes de transitions  $Cy(N)$  et  $Up(N)$ , donc on devrait avoir le même type de théorème avec des "cycles triviaux" et pas de divergence.

### 4. Cas $a_3 > 8$

En posant  $a_3 = 2a$  avec  $a \geq 5$  et  $b_1 = 2k$  est pair,

alors la transition de "type 1" devient  $v_{n+1} = av_n + k$  si  $v_n$  est impair (transition de type 1)

Si l'on admet la divergence pour le cas  $a_3 = 5$ , exploré algorithmiquement précédemment, il y aurait des valeurs qui divergent.

## IX. Annexes

### 1. "Théorème 1"

Soit  $u$  la suite de Syracuse définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \text{ si } u_n \text{ est pair} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \text{ si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

#### Enoncé du Théorème 1 :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (u_0, N) \in \mathbb{N}^2, \text{ avec } u_0 > 4 \text{ tels que } \left| \frac{u_N}{u_0} - 1 \right| < \varepsilon$$

Autrement dit, l'écart relatif entre  $u_0$  et  $u_N$  peut être aussi petit que l'on veut... et on a "quasiment" un cycle non trivial.

Il suffirait de prendre  $u_0 = 1$  et  $N = 3$  ou toute autre valeur correspondant au cycle trivial, c'est pourquoi on ajoute  $u_0 > 4$

On peut appeler ces nombres  $u_0$  "révolutionnaires" en cela qu'ils reviennent pratiquement à leur point de départ,  $u_0 \approx u_N$ , ils ont fait une révolution après un parcours très chaotique car à chaque transition, ils sont multipliés par 3 environ ou divisés par 2 ce qui peut représenter des variations absolues gigantesques.

#### I) Notations et définitions :

Tout d'abord, définissons quelques éléments et précisons quelques notations



### a) La suite de Syracuse réduite : $v$

Comme si  $u_n$  est impair,  $u_{n+1}$  est pair par construction, il est intéressant d'effectuer directement la transition suivante.

La suite de Syracuse réduite regroupe cette transition.

$$\begin{cases} v_0 > 0 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{2} \text{ si } v_n \text{ est pair (transition de type 0)} \\ v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{2} \text{ si } v_n \text{ est impair (transition de type 1)} \end{cases}$$

On utilisera dans la démonstration la suite  $v$  car si l'on démontre le "Théorème 1" pour  $v$  alors on l'aura démontré pour la suite standard de Syracuse  $u$

### b) $N = m + d$

On posera  $N = m + d$  où  $m$  représente le nombre de transitions de "type 1" et  $d$  représente le nombre de transitions de "type 0"

c) La valeur  $X = \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}3 - \text{Ln}2}$ , avec  $\text{Ln}$  la fonction logarithme népérien

## II) Démonstration

### 1) Idée de la démonstration :

On considère  $s_0(N) = 2^d (2^m - 1)$  avec  $N = m + d$  dont on peut aisément déterminer la trajectoire par  $v$ .

On montre que  $s_0(N)$  convient pour des couples  $(m, d)$  particuliers.

### 2) Etude de la trajectoire de $v_0(m) = 2^m - 1$ avec $m > 0$ :

Montrons par récurrence que : Pour tout  $n$  tel que  $0 \leq n \leq m$ ,  $v_n(m)$  est impair et  $v_m(m) = 3^m - 1$

Cela signifie que les  $m$  premières transitions  $t_n$  sont de "type 1" et que la transition  $m + 1$  est de "type 0".

a) Vérifions la propriété pour  $m = 1$

$v_0(1) = 2^1 - 1 = 1$  est impair donc la transition  $t_0$  est de "type 1"

$$v_1(1) = \frac{3v_0(1) + 1}{2} = \frac{3 \times 1 + 1}{2} = 2 = 3^1 - 1$$

donc la propriété est vraie pour  $m = 1$

b) Supposons que la propriété soit vraie pour  $m$  et montrons qu'elle est vraie pour  $m + 1$

$$v_0(m+1) = \sum_{i=0}^m 2^i = v_0(m) + 2^m = 2^m + v_0(m) \text{ est impair car } 2^n \text{ est pair pour tout } n > 0$$

$$\text{Donc, } v_1(m+1) = \frac{3v_0(m+1) + 1}{2} = \frac{3(2^m + v_0(m)) + 1}{2} = \frac{3 \times 2^m}{2} + \frac{3v_0(m) + 1}{2} = 3 \times 2^{m-1} + v_1(m) \text{ qui est}$$

impair d'après la propriété au rang  $m$

En faisant le même raisonnement, on obtient  $v_2(m+1) = 3^2 \times 2^{m-2} + v_2(m)$  qui est impair...

Et finalement  $v_m(m+1) = 3^m + v_m(m) = 3^m + 3^m - 1 = 2 \times 3^m - 1$  en remplaçant  $v_m(m) = 3^m - 1$  d'après la propriété au rang  $m$

Donc  $v_m(m+1)$  est impair et la transition  $m + 1$  est aussi de "type 1", c'est la première partie de la propriété au rang  $m + 1$

$$\text{Et } v_{m+1}(m+1) = \frac{3v_m(m+1) + 1}{2} = \frac{3(2 \times 3^m - 1) + 1}{2} = \frac{2 \times 3^{m+1} - 3 + 1}{2} = 3^{m+1} - 1 \text{ ce qui est la deuxième}$$

partie de la propriété au rang  $m + 1$  et cela termine la démonstration par récurrence.

**3) Montrons que : Si  $s_0(N) = 2^d(2^m - 1)$  avec  $N = m + d$  alors  $s_N(N) = 3^m - 1$**

Les  $d$  premières transitions sont de "type 0" et éliminent le facteur  $2^d$ .

Donc  $s_d(N) = 2^m - 1 = v_0(m)$  et en appliquant la propriété précédente, les  $m$  transitions suivantes sont de "type 1" et  $s_N(N) = v_m(m) = 3^m - 1$

**4) Etude de la limite de  $\frac{s_N(N)}{s_0(N)}$  quand  $N \rightarrow +\infty$**

$$\frac{s_N(N)}{s_0(N)} = \frac{3^m - 1}{2^d(2^m - 1)} = \frac{3^m \left(1 - \frac{1}{3^m}\right)}{2^d \times 2^m \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)} = \frac{3^m}{2^{m+d}} \times \frac{1 - \frac{1}{3^m}}{1 - \frac{1}{2^m}}$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{s_N(N)}{s_0(N)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{3^m}{2^{m+d}}$$

La convergence est même très rapide car en utilisant un développement limité à l'ordre 1 en 0 de  $\frac{1}{1-u} = 1+u$

$$\text{On a alors : } \left(1 - \frac{1}{3^m}\right) \left(1 + \frac{1}{2^m}\right) = 1 + \frac{1}{2^m} - \frac{1}{3^m} - \frac{1}{2 \times 3^m} = 1 + \frac{1}{2^m} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^m - \frac{1}{3^m}\right)$$

Il est intéressant d'étudier les couples  $(m, d)$  pour lesquels  $\frac{3^m}{2^{m+d}} \approx 1$

**5) Cas où  $\frac{3^m}{2^{m+d}} \approx 1$**

$$\frac{3^m}{2^{m+d}} \approx 1 \Leftrightarrow m \ln 3 - (m+d) \ln 2 \approx 0 \text{ (avec Ln la fonction logarithme népérien)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{d} \approx \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} \text{ (car } d \neq 0)$$

$$\text{Posons } X = \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} \approx 1,7095$$

Conclusion : On s'intéressera désormais à  $\frac{m}{d} \approx X$

**6) Approximation de  $X$  par des fractions**

$X$  est un nombre irrationnel ( $X \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ).

Il peut être approximer aussi près que l'on veut par des nombres rationnels.

Parmi toutes les approximations, on peut s'intéresser aux fractions  $\frac{m_p}{d_p}$  qui correspondent au développement infini en fraction continues de  $X$  car la convergence vers  $X$  est rapide :

m	d	N	m/d - x
1	1	2	$-7,0951 \times 10^{-1}$
2	1	3	$2,9049 \times 10^{-1}$
5	3	8	$-4,2845 \times 10^{-2}$
12	7	19	$4,7744 \times 10^{-3}$
41	24	65	$-1,1780 \times 10^{-3}$
53	31	84	$1,6613 \times 10^{-4}$
306	179	485	$-1,4085 \times 10^{-5}$
665	389	1054	$2,7677 \times 10^{-7}$
15601	9126	24727	$-4,9171 \times 10^{-9}$

31867	18641	50508	$9,6119 \times 10^{-10}$
79335	46408	125743	$-1,9476 \times 10^{-10}$
111202	65049	176251	$1,3650 \times 10^{-10}$
190537	111457	301994	$-1,4274 \times 10^{-12}$
10590737	6195184	16785921	$2,0821 \times 10^{-14}$
10781274	6306641	17087915	$-4,7737 \times 10^{-15}$
53715833	31421748	85137581	$2,7256 \times 10^{-16}$
171928773	100571885	272500658	$-4,3877 \times 10^{-17}$
225644606	131993633	357638239	$3,1454 \times 10^{-17}$
397573379	232565518	630138897	$-1,1224 \times 10^{-18}$
6189245291	3620476403	9809721694	$6,5206 \times 10^{-20}$

$$\text{Or } \frac{m_p}{d_p} - X = \frac{m_p}{d_p} - \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}3 - \text{Ln}2} = \frac{m_p (\text{Ln}3 - \text{Ln}2) - d_p \text{Ln}2}{d_p (\text{Ln}3 - \text{Ln}2)} = \frac{m_p \text{Ln}3 - (m_p + d_p) \text{Ln}2}{d_p (\text{Ln}3 - \text{Ln}2)} = \frac{\text{Ln} \left( \frac{3^{m_p}}{2^{m_p + d_p}} \right)}{d_p (\text{Ln}3 - \text{Ln}2)}$$

$$\text{Soit : } \text{Ln} \left( \frac{3^{m_p}}{2^{m_p + d_p}} \right) = d_p (\text{Ln}3 - \text{Ln}2) \left( \frac{m_p}{d_p} - X \right)$$

En prenant l'exponentielle des deux membres, on a :

$$(1) : \frac{3^{m_p}}{2^{m_p + d_p}} = e^{(\text{Ln}3 - \text{Ln}2) d_p \left( \frac{m_p}{d_p} - X \right)}$$

## 7) Rappel d'un théorème général sur les fractions continues et application

D'après les propriétés des fractions continues (source Wikipedia), on a le théorème suivant :

$$\text{Si } (h_n/k_n) \text{ est de limite } l \text{ alors : } \frac{1}{k_p (k_{p+1} + k_p)} < \left| l - \frac{h_p}{k_p} \right| < \frac{1}{k_p k_{p+1}} \text{ ou } \frac{1}{k_{p+1} + k_p} < k_p \left| l - \frac{h_p}{k_p} \right| < \frac{1}{k_{p+1}}$$

Le théorème précédent sur les fractions continues, appliqué dans notre cas, donne :

$$d_p \left| \frac{m_p}{d_p} - X \right| < \frac{1}{d_{p+1}} \text{ et donc } \lim_{p \rightarrow +\infty} d_p \left| \frac{m_p}{d_p} - X \right| = 0 \text{ car la suite } (d_p) \text{ est une suite strictement croissante, non bornée, soit } \lim_{p \rightarrow +\infty} d_p = +\infty$$

En utilisant un développement limité en 0 de  $e^u = 1 + u + o(u)$  dans l'expression (1), on a :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{3^{m_p}}{2^{m_p + d_p}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} 1 + (\text{Ln}3 - \text{Ln}2) d_p \left( \frac{m_p}{d_p} - X \right) = 1$$

$$\text{Autrement dit : } \forall \varepsilon > 0, \exists N_p \in \mathbb{N} : \left| \frac{3^{m_p}}{2^{m_p + d_p}} - 1 \right| < \varepsilon$$

## 8) Conclusion :

Pour la suite réduite  $v$ , en combinant les résultats de 4) et de 7), on peut dire avec  $v_0 = s_0(N)$  et  $N = m + d$  :

$$\text{Par définition de la limite, } \forall \varepsilon > 0, \exists (v_0, N) \in \mathbb{N}^2, \text{ avec } v_0 > 4 \text{ et } N > 3 \text{ tel que } \left| \frac{v_N}{v_0} - 1 \right| < \varepsilon$$

On a évidemment le résultat pour la suite standard de Syracuse  $u$  avec  $u_0 = s_0(N)$  et  $N = 2m + d$  car il y a  $m$  transitions supplémentaires :

$\forall \varepsilon > 0, \exists (u_0, N) \in \mathbb{N}^2$ , avec  $u_0 > 4$  et  $N > 3$  tel que  $\left| \frac{u_N}{u_0} - 1 \right| < \varepsilon$

### 9) Résultats numériques

**NB** : Pour  $(m, d) = (1, 1)$ , on trouve bien le cycle trivial avec  $u_0 = 1$ .

$m$	$d$	$N$	$\frac{m}{d} - X$	$v_0 = 2^d(2^m - 1)$	$v_N = 3^m - 1$	$\left  \frac{v_N}{v_0} - 1 \right $	$\frac{1}{d_{p+1}}$
1	1	2	$-7,0951 \times 10^{-1}$	2	2	0	$5 \times 10^{-1}$
2	1	3	$2,9049 \times 10^{-1}$	6	8	$3,33 \times 10^{-1}$	$3,33 \times 10^{-1}$
5	3	8	$-4,2845 \times 10^{-2}$	248	242	$2,42 \times 10^{-2}$	$8,33 \times 10^{-2}$
12	7	19	$4,7744 \times 10^{-3}$	524160	531440	$1,39 \times 10^{-2}$	$2,44 \times 10^{-2}$
41	24	65	$-1,1780 \times 10^{-3}$	36893488147402326016	36472996377170786402	$1,14 \times 10^{-2}$	$3,23 \times 10^{-2}$
53	31	84	$1,6613 \times 10^{-4}$	19342813113834064647815168	19383245667680019896796722	$2,09 \times 10^{-3}$	$5,59 \times 10^{-3}$
306	179	485	$-1,4085 \times 10^{-5}$	$9,98959536101118 \times 10^{145}$	$9,97938882337109 \times 10^{145}$	$1,02 \times 10^{-3}$	$2,57 \times 10^{-3}$
665	389	1054	$2,7677 \times 10^{-7}$	$1,93025830561934 \times 10^{317}$	$1,93034257116813 \times 10^{317}$	$4,37 \times 10^{-5}$	$1,10 \times 10^{-4}$

On a bien une précision meilleure que  $\frac{1}{d_{p+1}}$ .

L'approximation  $\left| \frac{v_N}{v_0} - 1 \right|$  correspond bien à  $d \left| \frac{m}{d} - X \right| (\text{Ln}3 - \text{Ln}2)$

La démonstration de ce théorème est faite dans le cas standard mais elle se généralise sans aucune difficulté pour  $b_1$  quelconque.

On peut même généraliser ce théorème en prenant tout coefficient  $a_3$  impair positif au lieu du cas restrictif 3 en considérant :

$$\begin{cases} v_0 > 0 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{2} \text{ si } v_n \text{ est pair (transition de type 0)} \\ v_{n+1} = \frac{a_3 v_n + b_1}{2} \text{ si } v_n \text{ est impair (transition de type 1)} \end{cases} \quad \text{avec } a_3 = 2a + 1 \text{ et } a \geq 0$$

**L'énoncé du Théorème 1 devient :**

$\forall \varepsilon > 0, \exists (u_0, N) \in \mathbb{N}^2$ , avec  $u_0 > \text{maxSyr\_bl}$  tels que  $\left| \frac{u_N}{u_0} - 1 \right| < \varepsilon$

- $u_0 > \text{maxSyr\_bl}$  pour éviter les cycles triviaux
- La démonstration se fait avec  $X = \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}(a_3) - \text{Ln}(2)}$

**Fin de la démonstration du Théorème 1**

## 2. Conjecture de Jacques BALLASI

Si l'on considère une liste de transitions L de longueur N (différentes de celle du cycle trivial, c'est à dire 1010... et 01010...) et  $v_L$ , l'unique solution de l'intervalle  $[0, 2^N[$ , la solution minimale qui suive L.

Si l'on considère ensuite l'ensemble  $S_L$  de ces N solutions pour chaque liste  $L_i$ , permutation circulaire de L, alors le maximum de  $S_L$  est dans l'intervalle  $[2^{N-1}, 2^N[$ .

Cette conjecture a été vérifiée pour toutes les listes pour  $N \leq 27$  et aussi sur un ensemble de listes aléatoires plus longues.

Mais je n'en ai pas la preuve formelle, aucun raisonnement par récurrence ne me semble possible mais j'espère me tromper ! Par exemple, si l'on prend la liste  $L = "001110011111"$ , et  $L0 = L + "0" = "0011100111110"$ , les listes pour lesquelles  $v_L \geq 2^{N-1}$  ne sont pas dans celles de  $L0$ , c'est la même chose pour  $L = "1101100110000001000000010"$  ou  $L = "11000011111001001001101"$ .

Pour  $b_1 \neq 1$ , on peut formuler et "vérifier" une conjecture analogue en éliminant toutes les permutations circulaires de listes contenant les différents cycles pour cette valeur de  $b_1$

Test de ma conjecture pour une longueur de :     
Test de ma conjecture pour des listes aléatoires pendant  secondes

## X. Références

1. Conjecture de Syracuse en français, page Wikipedia : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture\\_de\\_Syracuse](https://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Syracuse)
2. Conjecture de Collatz en anglais, page Wikipedia : [https://en.wikipedia.org/wiki/Collatz\\_conjecture](https://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture)
3. Document en français de Shalom Eliahou, "Le problème  $3n+1$  : y-a-t-il des cycles non triviaux ?" qui fait un excellent raisonnement sur l'invariance du produit des termes d'un éventuel cycle après une transition. Avec les intervalles de Farey, il obtient que si l'on a vérifié la conjecture pour  $n < 5 \times 10^{18} \approx 2^{62.116}$ , un cycle a au moins une longueur de 17 milliards et si la conjecture était vérifiée pour  $2.17 \times 10^{20}$ , la longueur minimale serait alors de 186 milliards (pour la suite standard de Syracuse). Comme on a maintenant vérifié la conjecture pour  $v_0 < 2^{68} \approx 2.95 \times 10^{20}$ , le raisonnement pourrait être réactualisé, et l'on est déjà certain que la longueur minimale d'un cycle non trivial est au moins de 186 milliards d'éléments.  
Voir le document en français : <https://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-y-a-t-il-des-cycles-non-triviaux-III.html>
4. Document en anglais de Shalom Eliahou, "The  $3x + 1$  problem : new lower bounds on nontrivial cycle lengths", ce document, équivalent en anglais de la référence précédente, fait partie des références de la page wikipedia de la conjecture de Collatz en anglais  
Voir le document en anglais : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X9390052U>
5. Mots de Dyck et Triangle de Catalan en français : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle\\_de\\_Catalan](https://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle_de_Catalan)
6. Catalan's triangle en anglais : [https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan%27s\\_triangle](https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan%27s_triangle)
7. Document d'Eric Roosendaal, dans lequel on a la liste des records de "vol en altitude" (glide).  
Voir le document en anglais : <https://www.ericr.nl/wondrous/glidrecs.html>

## XI. Voir aussi : Autres documents

### Remarques

- Je suis francophone et la version anglaise du document a été obtenue dans "mon" anglais très approximatif ou en utilisant l'application "Google Translate" hors ligne.

Sachant que la traduction en ligne est certainement bien meilleure et compte tenu de l'évolution très rapide de la qualité des traductions en général, il est certainement préférable de lancer la traduction en ligne de la partie du document en français.

- Les documents en HTML ont été écrits avec les outils d'édition formelle pour le Web que j'ai développés au début des années 2000 (peut-être avant même les projets ayant donné naissance à MathJax), principalement pour "Microsoft Internet Explorer".  
Le rendu n'a pas été réactualisé depuis plus de 15 ans et les caractéristiques des navigateurs ont un peu changé entre temps, donc il y a quelques imprécisions de placement des indices (qui pourraient être corrigées)

Il faut ajouter pour transformer le format natif environ 500 Koctets de bibliothèque JTMATH et de fichiers de styles et images communs à tous les documents.

Vous devez télécharger un sous-ensemble des bibliothèques JTMATH.

Il faudra ensuite extraire les fichiers de l'archive dans le même répertoire que ce document.

- La conversion du format HTML vers le format PDF pour avoir un document statique dégrade encore un peu la qualité (traits de fraction manquants) et augmente la taille du fichier.

### Liste des documents

- Démonstration du Théorème 0, version 1, démonstration différente
  - PDF en français  
SHA256 : F9020212A09A4A95F14F1BF72E0F736E857C679C3E45EB90D500E65DFBF417A8
  - PDF en anglais  
SHA256 : B3FB1B0A47CCE34A818C3E7D1A617E242F302057D1577A6EC409AAE4B4AC6DFB
- Fonction minimalisée JBALLASI en Javascript (214 octets)  
SHA256 : D5FF4B50E36CB783D9AA0C01FF38B06A68822456B88155C9264A0C1444740095
- Archive ZIP du sous ensemble de la librairie JTMATH :  
SHA256 : D1FCC2A1A87178114201E7FA6D887B60BBE7DD536FB00B0C1550C7B7515CBCE6
- Archive ZIP des programmes de chiffrement symétrique avec une clé secrète (en Javascript avec NodeJS et en PHP)  
SHA256 : B1B25F57052EE856F0FE678702766B6DB3989EC2AD2B38211B18ECDCE900C0C2
- Version 3 : Démonstration des théorèmes pour les extensions de la suite de Syracuse :
  - DHTML + Javascript en français et anglais (sans la librairie JTMATH minimisée)  
SHA256 : 5B81434FFC2A667AAAFB31D71179ACAF8FD1BF882220D5FB072580A047D17F71
  - Archive ZIP du DHTML + Javascript en français et anglais (sans la librairie JTMATH minimisée)  
SHA256 : 2561C0A513E0DA773AFCED3B780E15E5224D1A54DD862370C5A4EA3A0BB46CD0
  - Archive ZIP du DHTML + Javascript en français et anglais (avec la librairie JTMATH minimisée)  
SHA256 : 290F4316673CED8E99A6AF8582888EBDC6C8BAF289572DD29BC01387A1EFD6B6
  - HTML statique en français  
SHA256 : 820A515966D3A9B51B4A7E0071A01AA47ECF9F1D912A9FECAF639CF6A583DCB4
  - HTML statique en anglais  
SHA256 : AABF71A8EDF4BE7BDDDB054A5367DA6496F55C08F3FFB48510A6D6A57302C026F
  - HTML statique en français et deuxième partie en anglais  
SHA256 : E1450175C4BC5FFA56527C494333E92DC77FFE3625B48FC0DB01AA8E7600AD30
  - HTML statique en anglais et deuxième partie en français  
SHA256 : 391985F2E1C9D5736B1466DDBFD90FE80FBB32BBB4C31939539FC39917D56749
  - PDF en français  
SHA256 : F726D065D2476FB1B67C158CBBF38FD8711EF4DF26B829F2010798D16E5088AD
  - PDF en anglais  
SHA256 : 3741FC5A0C9373233FB991C8B6C71EE3C5EDE55E6FDD758073A15E2AFEE7CA63
  - PDF en français et deuxième partie en anglais  
SHA256 : 8D02B7C994F8CC2DB0E170AE653F72303C3DC25A7BF30BA2E80982E01496DA4A
  - PDF en anglais et deuxième partie en français  
SHA256 : 7033199AEB33D9D26A4AB8B12531FB8D3462A64CE7F93229B4ABC11A4D0B0446
- Version 3.1 : Démonstration des théorèmes pour les extensions de la suite de Syracuse :
  - Archive ZIP du DHTML + Javascript en français et anglais (sans la librairie JTMATH minimisée)  
SHA256 : 7EE4920F1D6323FBBC0F55FD34DC8583DAE2264173E31328D7FC42E41F5AB61A
  - Archive ZIP du DHTML + Javascript en français et anglais (avec la librairie JTMATH minimisée)  
SHA256 : 51FCE61F35C63041F53FAA24BBCFC9696D84EAF1FBFD70B4327FFCD7B2A842B8
  - **PDF des résultats** (annexe des deux documents suivants) sur le site <https://www.bajaxe.com> :  
SHA256 : 4245BAA2E6D5CFBC4F6EEBA956013F59EC554AE3B057A948D1FA9A93065683AD
  - PDF en français
  - PDF en anglais

Des informations complémentaires actualisées sur le site Web : <https://www.bajaxe.com>

----- Jacques BALLASI -----